

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

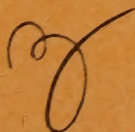
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jacques MARTI

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : ETUDE DES SYSTEMES :

- à un degré de liberté linéaires ou non, conservatifs ou non, excités par impulsions ou chocs périodiques,
- à plusieurs degrés de liberté linéaires, conservatifs ou non, excités par impulsions ou chocs périodiques.

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 21 février 1970 devant la Commission d'Examen

MM. Y. PIRONNEAU Président

D. TARDY
P. GUEVEL
J. VILAINE

} Examineurs

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

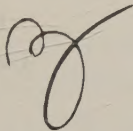
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jacques MARTI

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : ETUDE DES SYSTEMES :

- a un degré de liberté linéaires ou non, conservatifs ou non, excités par impulsions ou chocs périodiques,
- à plusieurs degrés de liberté linéaires, conservatifs ou non, excités par impulsions ou chocs périodiques.

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 21 février 1970 devant la Commission d'Examen

MM. Y. PIRONNEAU Président

D. TARDY
P. GUEVEL
J. VILAINE

} Examinateurs

THESES

DOCTEUR-INGENIEUR

Jacques MARTI



UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

• • • • •

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs

M. BRILLOUET

Mathématiques

M. MOLINARO

«

M. PAUC

«

M. PETRESCO

«

M. RAFFIN

«

M. VIVIER (E.N.S.M.)

«

M. TARDY (E.N.S.M.)

Mécanique

M. RAVILLY (E.N.S.M.)

«

M. AVIGNON

Physique

M. BOULLLOUD

«

M. COLLET

«

M. MINN

«

M. MEZEN CEV (E.N.S.M.)

«

M. MOUTON

«

M. DUNOYER

Chimie

M. GRAFF

«

M. PIERI

«

M. QUINIOU

«

M. WOJTKOWIAK

«

Melle DEBRAU X

Biologie

M. GARRIGUES

«

Mme LE DOUARIN

«

M. LE DOUARIN

«

M. SELLIER

«

M. CAVET

Sciences de la Terre

Professeurs sans chaire**M. MEYER****Mathématiques****M. BARDON****Physique****M. GOUREAUX**

"

M. LASKAR

"

Mlle OFFRET (E.N.S.M.)

"

M. GOBIN (E.N.S.M.)**Chimie****M. MARTIN**

"

M. ROUXEL

"

M. TOURNOUX

"

M. DUPONT**Biologie****M. SAUDRAY**

"

M. OTTMANN**Sciences de la Terre****Maîtres de Conférences****M. FOUQUES****Mathématiques****M. IBISCH**

"

M. LAMEAU (E.N.S.M.)

"

M. LEBORGNE

"

M. GUEVEL (E.N.S.M.)**Mécanique****M. SULMONT (E.N.S.M.)**

"

M. VILAINE (E.N.S.M.)

"

M. CAILLER (I.U.T.)**Physique****M. COTTU (I.U.T.)**

"

M. LE BIHAN

"

M. LE CORRE (I.U.T.)

"

M. LONCKE

"

M. ROSIER

"

M. BOUCHY (I.U.T.)**Chimie****M. CHABANNEL**

"

Mme MARTIN

"

M. POINTEAU (E.N.S.M.)

"

M. AMOURIQ**Biologie****M. LEBRUN**

"

Mme NICOLA S-PRATT

"

M. FORESTIER**Sciences de la Terre****M. NICOLAS**

"

Secrétaire Général**M. LERAY**

En hommage à la mémoire de mon Père,

A ma femme.

Nous tenons tout d'abord à remercier tous ceux qui ont prêté leur concours à la réalisation du présent travail.

C'est à Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon, Ancien Directeur de l'E.N.S.M., que nous adressons particulièrement nos plus vifs remerciements. C'est lui qui nous a initié à la recherche, qui nous a constamment conseillé et encouragé. C'est dans le laboratoire de mécanique des structures qu'ont été effectuées toutes les expériences. Nous lui exprimons ici notre profonde et respectueuse gratitude d'avoir bien voulu assumer la présidence de cette thèse.

Nous tenons à témoigner tous nos remerciements à Messieurs les Professeurs TARDY, VILAIN et GUEVEL qui nous ont fait l'honneur de constituer le Jury.

Toute notre reconnaissance s'adresse au personnel du Centre de Calcul et au personnel technique du laboratoire de mécanique des structures pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée dans les réalisations techniques.

Enfin, nous ne saurions oublier d'adresser nos remerciements à Madame ALUSSON, Madame OMNES et Madame MEZENECV, ainsi qu'au Service de l'imprimerie de l'E.N.S.M., qui ont su réaliser avec goût et compétence la présente thèse.

INTRODUCTION

La réponse d'un système linéaire non amorti, à un degré de liberté, excité par impulsions ou chocs périodiques, a été étudiée par différentes méthodes exposées dans le livre : « STABILITY AND OSCILLATIONS OF ELASTIC SYSTEMS » de MM. Y. PANOVKO et L. GUBANOVA .

Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon, a trouvé une méthode de calcul dans le plan des phases, qui représente mieux la réalité physique et qui est plus rapide.

Dans une première partie, nous allons étudier l'application de cette méthode à la recherche de la solution des systèmes linéaires, avec amortissement, à un degré de liberté, excités par impulsions ou chocs périodiques.

Ensuite, dans une deuxième partie, nous étendrons cette méthode de calcul à des systèmes à un degré de liberté, non linéaires, excités par impulsions ou chocs périodiques, dans lesquels nous aurons approché la caractéristique des ressorts par des segments de droites .

Enfin, dans une troisième partie, nous étudierons les systèmes à plusieurs degrés de liberté excités par impulsions ou chocs périodiques.

:
:
:

Première Partie

SOMMAIRE

Chapitre I - Systèmes linéaires à un degré de liberté sans amortissement excités par impulsions ou chocs périodiques .	p. 9
--	------

1°) Généralités

2°) Courbe $\frac{|A|}{|\frac{\Delta V}{\omega_0}|}$

Chapitre II - Systèmes linéaires à un degré de liberté avec amortissement, excités par impulsions ou chocs périodiques.	p. 13
---	-------

1°) Généralités

2°) Relations importantes

3°) Etude de l'amplitude C

4°) Calcul de l'amplitude y du déplacement

5°) « « y' de la vitesse

6°) Tracé des courbes théoriques

(remarque : méthode graphique)

7°) Maxima et minima alignés

8°) Mesure de l'amortissement en fonction de deux maxima successifs .

Chapitre III - Etude expérimentale	p. 27
------------------------------------	-------

1°) Schéma du système

2°) Application à la mesure de l'amortissement

3°) Courbes expérimentales

4°) Conclusion .

Deuxième Partie

SOMMAIRE

Chapitre I - Système à un degré de liberté non linéaire et conservatif p.37
(caractéristique à deux pentes) excité par impulsions ou
chocs périodiques .

- 1°) Généralités
- 2°) Calcul de la période propre
- 3°) Calcul de la période des impulsions ou des chocs
- 4°) Tracé des courbes de résonance

Chapitre II - Système à un degré de liberté non linéaire et non conservatif p.45
(caractéristique à deux pentes) excité par impulsions ou
chocs périodiques .

- 1°) Généralités
- 2°) Calcul de la période des impulsions ou des chocs
- 3°) Organigramme du calcul
- 4°) Tracé des courbes de réponse du système
 - a) Courbes théoriques
 - b) Courbes expérimentales
- 5°) Conclusion

Chapitre III - Système à un degré de liberté non linéaire et conservatif p.55
(caractéristique du type Duffing) excité par impulsions ou
chocs périodiques .

- 1°) Généralités
- 2°) Etude du système excité par impulsions ou chocs périodiques
- 3°) Organigramme
- 4°) Courbe de réponse du système aux chocs périodiques

Chapitre IV - Système à un degré de liberté non linéaire et non conservatif p.61
(caractéristique du type Duffing) excité par impulsions ou
chocs périodiques .

- 1°) Généralités
- 2°) Etude d'une solution approchée par la méthode de Kryloff et Bogoliuboff
 - a) Expression de la solution
 - b) Courbes théoriques de la réponse du système
- 3°) Etude d'une solution approchée par la méthode de linéarisation par morceaux
 - a) Equation étudiée
 - b) Courbes théoriques de la réponse du système
- 4°) Conclusion et comparaison des résultats donnés par ces deux méthodes
- 5°) Schéma du système étudié
- 6°) Courbes expérimentales
- 7°) Conclusion générale et extensions possibles .

Troisième Partie

SOMMAIRE

Chapitre I - Etude d'un système linéaire à deux degrés de liberté et conservatif excité par chocs ou impulsions périodiques	p.77
---	------

- 1°) Généralités
 - a) Schéma du système étudié
 - b) Equations du mouvement
 - c) Recherche des valeurs propres
 - d) Vecteurs propres et matrice des modes
- 2°) Equations du mouvement dans la base propre
- 3°) Etude des solutions dans la base propre
- 4°) Etude des solutions réelles x_1 et x_2
- 5°) Organigramme
- 6°) Courbes de réponse du système
- 7°) Conclusion

Chapitre II - Etude d'un système linéaire non conservatif à deux degrés de liberté excité par chocs ou impulsions périodiques	p.85
---	------

- 1°) Généralités
 - a) Schéma du système étudié
 - b) Equations du mouvement
 - c) Remarque
- 2°) Etude de la solution
 - a) Réponse au terme constant
 - b) Réponse au terme général
 - c) Solution complète
- 3°) Organigramme
- 4°) Courbes de réponse du système
 - a) Courbes théoriques
 - b) Courbes expérimentales
- 5°) Conclusion

Conclusion générale	p.97
---------------------	------

BIBLIOGRAPHIE	p.99
---------------	------

PREMIERE PARTIE

Chapitre I

Systèmes linéaires à un degré de liberté sans amortissement excités par impulsions ou chocs périodiques

1°) Généralités

On étudie le système à un degré de liberté sans amortissement, qui a pour équation du mouvement :

$$m x'' + Kx = I(t)$$

$I(t)$ impulsion périodique de période T
 T_0 période propre

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_0 \text{ pulsation propre du système}$$

m : masse du système

k : raideur du système

Une impulsion entraîne une discontinuité sur la vitesse; entre deux impulsions, les oscillations sont des oscillations libres.

La solution du système libre $mx'' + kx = 0$ est :

$$x = R \cos \omega_0 t$$

$$x' = -R \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$\text{soit } \frac{x'}{\omega_0} = -R \sin \omega_0 t$$

Dans le plan des phases le point $M(x, \frac{x'}{\omega_0})$ décrit un cercle.

Soumettons maintenant le système à des impulsions périodiques. Lorsque le régime permanent est établi, deux cas peuvent se présenter :

$$a) T = T_0 + 2\tau > T_0 \text{ (fig. 1)}$$

Dans ce cas, on a $\frac{\Delta V}{\omega_0} = 2R \sin \alpha$

$$\text{Amplitude de la vibration } A = 2R = \frac{\Delta V}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$A = \frac{\Delta V}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\sin \left(\frac{1-r}{r} \right) \pi}$$

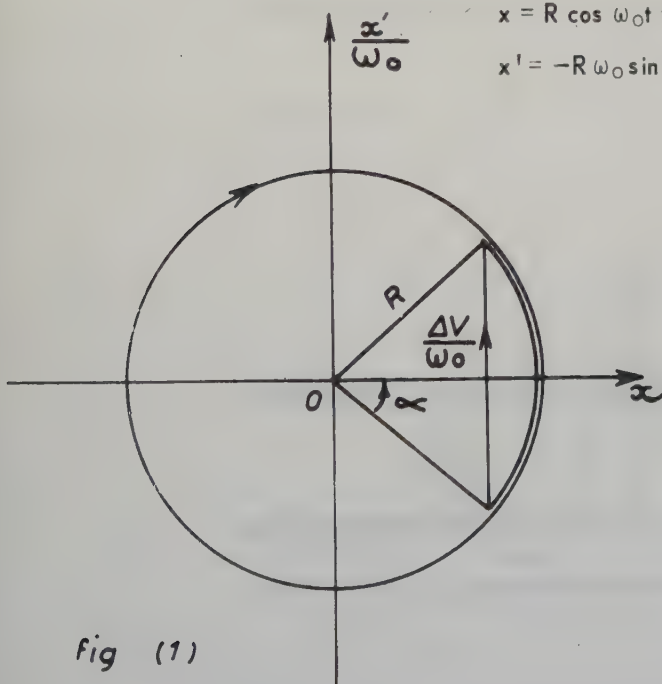


fig (1)

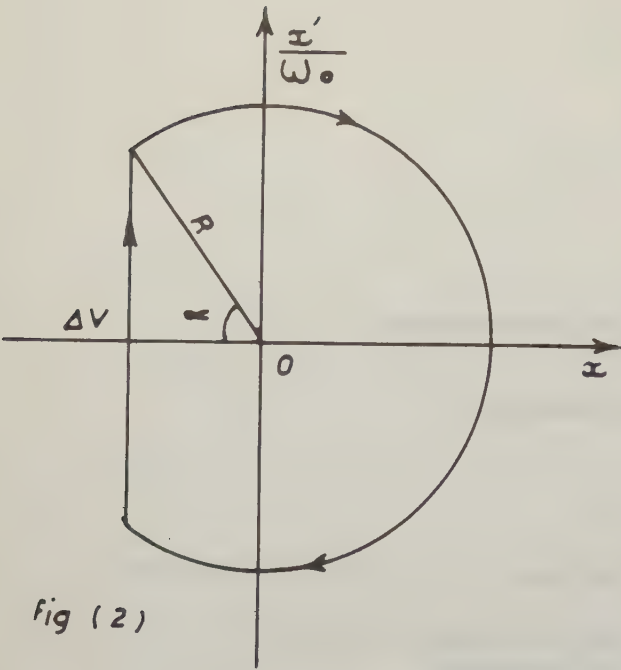


Fig (2)

b) $T = T_0 - 2\tau < T_0$: (Fig.2)

$$\alpha = 2\pi \frac{\tau}{T_0} = \frac{r-1}{r} \pi$$

$$\text{Amplitude } A = \frac{\Delta V (1 + \cos \alpha)}{2\omega_0 \sin \alpha}$$

courbes x et x' en fonction du temps:

fig. 3 et 4 pour $T < T_0$

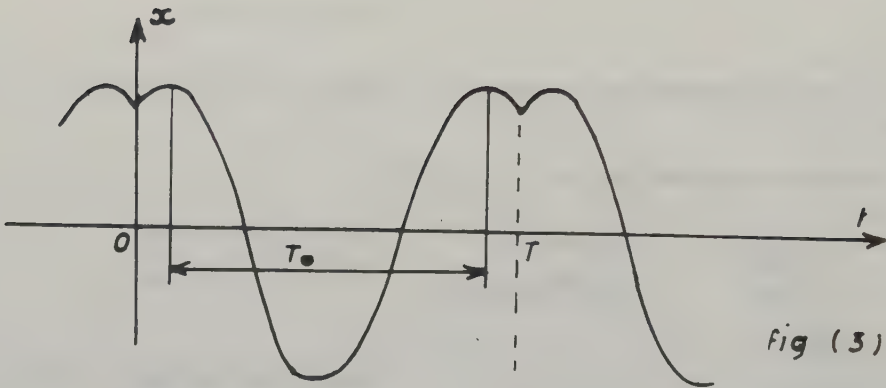


Fig (3)

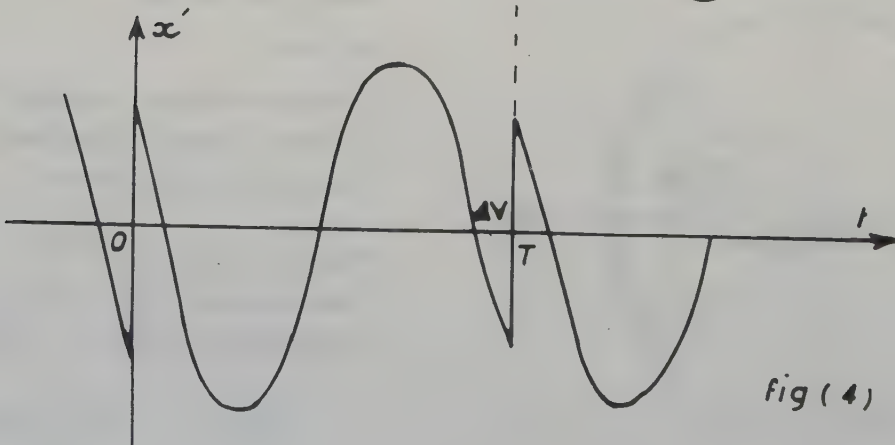
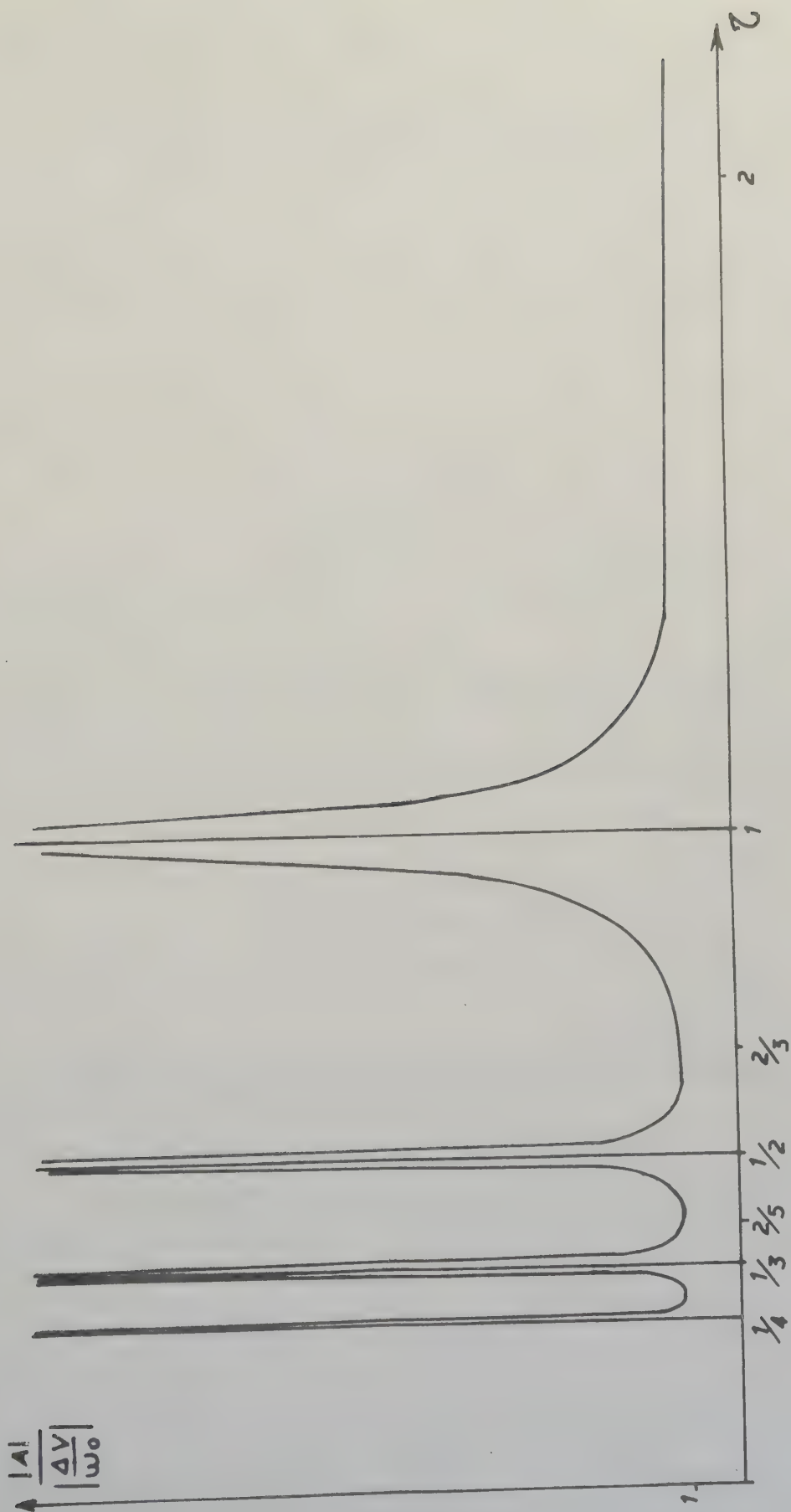


Fig (4)



Chapitre II

Systèmes linéaires à un degré de liberté avec amortissement excités par impulsions ou chocs périodiques

1°) Généralités

On étudie le système à un degré de liberté avec amortissement qui a pour équation du mouvement :

$$m x'' + b x' + k x = I(t)$$

ou

$$m (x'' + 2\varepsilon \omega_0 x' + \omega_0^2 x) = I(t)$$

avec la
définition
des paramètres

$I(t)$ impulsion périodique (force) de période T

avec $\varepsilon = \frac{b}{2m\omega_0}$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (ω_0 pulsation du système non amorti)

$\lambda = \varepsilon \omega_0$

$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ pseudo pulsation et $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$

L'impulsion entraîne une discontinuité sur la vitesse de sorte qu'entre deux impulsions successives, les oscillations sont des oscillations libres.

Une solution du système libre : $m (x'' + 2\varepsilon \omega_0 x' + \omega_0^2 x) = 0$ est :

$$x = C e^{-\lambda t} \cos \Omega t$$

avec

$$x' = -C \lambda e^{-\lambda t} \cos \Omega t - C e^{-\lambda t} \Omega \sin \Omega t$$

soit

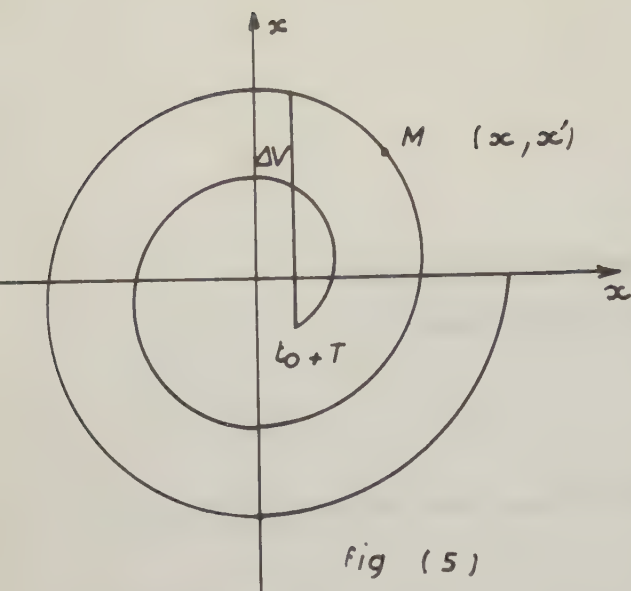
$$x' = -C e^{-\lambda t} \omega_0 \sin (\Omega t - \psi) \text{ en posant } \operatorname{tg} \psi = \frac{\lambda}{\Omega}$$

ou $\cos \psi = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

Dans le plan des phases, le point $M(x, x')$ décrit une spirale logarithmique avec $M(x, x') = M(t)$ point ne dépendant que du temps. (fig. 5)

Nous allons considérer des impulsions périodiques de période T .

Au point $M(t_0 + T)$, on envoie la première impulsion au système (discontinuité ΔV sur la vitesse) ΔV est tel que le point $M(x, x')$ vient se superposer au point $M(t_0)$, c'est-à-dire



qu'on accroche directement le cycle limite; ainsi, en déclenchant à $t_0 + 2T$ l'autre impulsion, le point M décrira de nouveau le cycle; de même pour l'impulsion à $t_0 + 3T \dots$ etc.

Cette façon de concevoir le cycle peut étonner, car, en réalité, le système est au repos et on le soumet à l'instant $t=0$, à des impulsions périodiques et ce n'est qu'au bout d'un certain temps, c'est-à-dire lorsque le régime transitoire est terminé, qu'on atteint le cycle limite. La première façon de voir le phénomène permet de raisonner plus facilement sur le cycle limite

2°) Relations importantes

Le cycle nous permet d'écrire :

$$x(t_0) = x(t_0 + T)$$

$$x'(t_0) = x'(t_0 + T) + \Delta V$$

$$\cos \Omega t_0 e^{-\lambda T} \cos \Omega(t_0 + T) \quad (1)$$

$$-C e^{-\lambda t_0} \omega_0 \sin(\Omega t_0 - \psi) = \Delta V - C e^{-\lambda(t_0 + T)} \omega_0 \sin[\Omega(t_0 + T) - \psi] \quad (2)$$

3°) Etude de l'amplitude C

De l'équation (2) nous tirons :

$$C = \frac{-\Delta V}{\omega_0 e^{-\lambda t_0} \{ \sin(\Omega t_0 - \psi) - e^{-\lambda T} \sin[\Omega(t_0 + T) - \psi] \}} \quad (3)$$

a) Variation de C en fonction de $r = \frac{\omega}{\omega_0}$ ω étant la pulsation des impulsions.

C est une fonction de t_0 et de T, mais d'après (1) t_0 est une fonction de T

$$\frac{dC}{dr} = \frac{dC}{dT} \frac{dT}{dr} \quad \text{Or} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{r^2} T_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \text{est toujours différent de zéro}$$

$$\text{ce qui entraîne} \quad \frac{dC}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{dC}{dT} = 0$$

$$dC = \frac{\partial C}{\partial T} dT + \frac{\partial C}{\partial t_0} dt_0$$

$$\frac{dC}{dT} = \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{\partial C}{\partial t_0} \frac{dt_0}{dT}$$

On calcule $\frac{\partial C}{\partial T}$ et $\frac{\partial C}{\partial t_0}$ à partir de la relation (3)

et $\frac{dt_0}{dT}$ à partir de la relation (1)

$$\text{On a } \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{-\Delta V e^{-\lambda T} \cos [\Omega(t_0+T)-2\psi]}{e^{-\lambda t_0} \{ \sin (\Omega t_0 - \psi) - e^{-\lambda T} \sin [\Omega(t_0+T) - \psi] \}^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t_0} = \frac{\Delta V \{ \cos (\Omega t_0 - 2\psi) - e^{-\lambda T} \cos [\Omega(t_0+T) - 2\psi] \}}{e^{-\lambda t_0} \{ \sin (\Omega t_0 - \psi) - e^{-\lambda T} \sin [\Omega(t_0+T) - \psi] \}^2}$$

$$\text{et } \frac{dt_0}{dT} = \frac{e^{-\lambda T} \sin [\Omega(t_0+T) - \psi]}{\sqrt{1-\epsilon^2} \{ \sin \Omega t_0 - e^{-\lambda T} \sin \Omega(t_0+T) \}}$$

ce qui donne finalement tout calcul fait :

$$\frac{dC}{dT} = \frac{\Delta V e^{-\lambda T} \cos \Omega(t_0+T)}{e^{-\lambda t_0} \{ \sin (\Omega t_0 - \psi) - e^{-\lambda T} \sin [\Omega(t_0+T) - \psi] \}^2}$$

$$\text{On a alors } \frac{dC}{dT} = 0 \quad \text{pour}$$

$$\cos \Omega(t_0+T) = 0 \quad \text{soit } \Omega(t_0+T) = \frac{\pi}{2} + K_1 \pi$$

$$\Omega t_0 = \frac{\pi}{2} + K_1 \pi - \Omega T$$

Remplaçons Ωt_0 par sa valeur en fonction de ΩT ; dans la relation (1), on a :

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + K_1 \pi - \Omega T \right) = e^{-\lambda T} \cos \left(\Omega T + \frac{\pi}{2} + K_1 \pi - \Omega T \right) = 0$$

$$\text{soit } \frac{\pi}{2} + K_1 \pi - \Omega T = \frac{\pi}{2} + K_2 \pi$$

$$\Omega T = K \pi$$

Les maxima et minima du système sont donnés par :

$$r = \frac{2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{K} \quad \text{soit :} \quad \left| \begin{array}{l} r_1 = \sqrt{1-\epsilon^2} \\ r_2 = \frac{2}{3} \sqrt{1-\epsilon^2} \\ r_3 = \frac{1}{2} \sqrt{1-\epsilon^2} \\ r_4 = \frac{2}{5} \sqrt{1-\epsilon^2} \\ r_5 = \frac{1}{3} \sqrt{1-\epsilon^2} \end{array} \right.$$

b) Calcul de t_0 en fonction de T .

(1) $\cos \Omega t_0 = e^{-\lambda T} \cos \Omega(t_0 + T)$ donne en développant

$$\operatorname{tg} \Omega t_0 = \frac{e^{-\lambda T} \cos \Omega T - 1}{e^{-\lambda T} \sin \Omega T}$$

On a graphiquement, d'après le sens de parcours dans le plan des phases : fig. 5

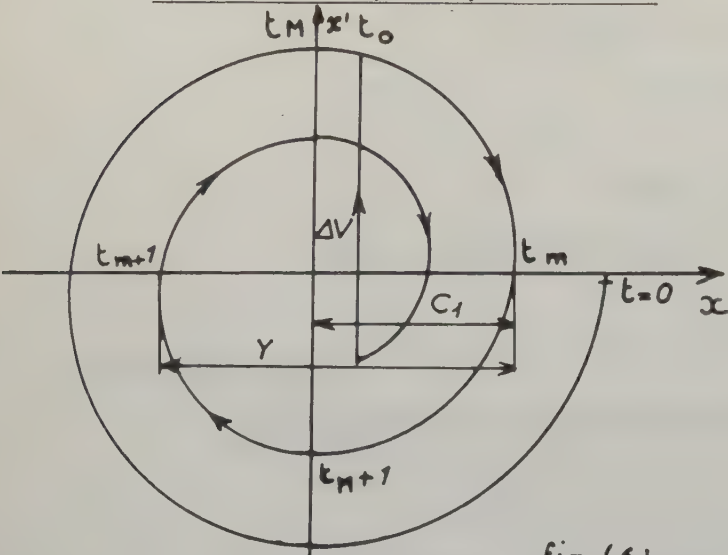
$$\pi < \Omega t_0 < 2\pi$$

ce qui donne la détermination principale de Ωt_0

au maximum et au minimum de C :

$$\Omega T = K\pi \text{ soit } \Omega t_0 = \frac{3}{2}\pi$$

4°) Calcul de l'amplitude y de la vibration



On sait que

$$x = C e^{-\lambda t} \cos \Omega t$$

$$x' = -C e^{-\lambda t} \omega_0 \sin (\Omega t - \psi)$$

le maximum ou minimum de x correspond à $x' = 0$

$$\text{soit } \operatorname{tg} \Omega t_m = -\frac{\lambda}{\Omega} = \operatorname{tg} \psi$$

$$\Omega t_m = \psi + K\pi$$

$$t_m = \frac{\psi + 2\pi}{\Omega}$$

(K est déterminé graphiquement)

On a 2 cas :

fig (6)

1er cas : $T > T_0$ fig 6

$$y = |x(t_m)| + |x(t_{m+1})| = C [e^{-\lambda t_m} \cos \Omega t_m - e^{-\lambda(t_m + \frac{\pi}{\Omega})} \cos \Omega(t_m + \frac{\pi}{\Omega})]$$

$$y = C e^{-\lambda t_m} \cos \Omega t_m (1 + e^{-\lambda \frac{\pi}{\Omega}}) = C e^{-\lambda t_m} \cos \psi (1 + e^{-\lambda \frac{\pi}{\Omega}})$$

$$\text{Or } C_1 = C e^{-\lambda t_m} \cos \psi$$

$$\underline{y = C_1 (1 + e^{-\lambda \frac{\pi}{\Omega}}) \quad T > T_0}$$

2ème cas $\frac{T_0}{2} < T < T_0$ fig. 7

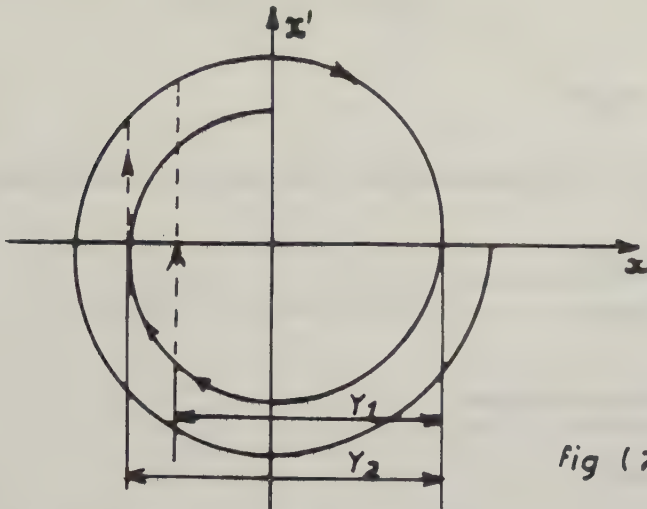


fig (7)

On a deux relations :

$$\begin{cases} y_1 = C_1 (1 + e^{-\lambda \frac{\pi}{\Omega}}) \\ y_2 = C_1 + |x(t_0)| \end{cases}$$

Remarque : (voir fig.)

On prend la valeur y_1 jusqu'à ce que $y_1 = y_2$ et ensuite on prend la valeur y_2 jusqu'à $T = T_0$

5°) Calcul de l'amplitude y' de la vitesse :

x' est maximum lorsque $x'' = 0$

ce qui donne

$$-C [e^{-\lambda t} \Omega \cos (\Omega t - \psi) - \lambda e^{-\lambda T} \sin (\Omega t - \psi)] = 0$$

$$\operatorname{tg} (\Omega t - \psi) = \frac{\Omega}{\lambda}$$

$$\operatorname{tg} (\Omega t - \psi) = \operatorname{tg} (\psi - \frac{\pi}{2})$$

soit finalement

$$\Omega t_M = 2 \psi + \frac{\pi}{2} + K \pi$$

(K étant déterminé graphiquement) (voir fig. 6)

On a :

$$2 \text{ cas } - \frac{T_0}{2} < T < T_0$$

$$y' = |x'(t_M)| + |x'(t_{M+1})|$$

$$- T > T_0$$

$$\cdot t_0 < t_M$$

$$y' = |x'(t_M)| + |x'(t_{M+1})|$$

$$\cdot t_0 > t_M$$

On a deux expressions possibles :

$$y' = |x'(t_0)| + |x'(t_{M+1})| \text{ si } |x'(t_0)| > |x'(t_{M+2})|$$

$$y' = |x'(t_{M+2})| + |x'(t_{M+1})| \text{ si } |x'(t_0)| < |x'(t_{M+2})|$$

6) Tracé des courbes théoriques

Au départ on se fixe

$$\Delta V = 1$$

$$T_0 = 1$$

$$\Omega = 2\pi$$

ε étant la seule variable

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}; \Omega = \omega_0 \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Cependant pour pouvoir comparer les courbes expérimentales et théoriques, on prendra les mêmes valeurs que celles obtenues expérimentalement

$$\varepsilon_1 = 8,25 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = 72 \cdot 10^{-3}$$

Remarque : Méthode graphique de tracé des courbes

On trace avec précision les courbes x et x'

$$x = e^{-\lambda t} \sin \Omega t \frac{x'_0}{\Omega}$$

$$x' = e^{-\lambda t} \left[-\frac{\lambda}{\Omega} \sin \Omega t + \cos(\Omega t) \right] x'_0$$

les données sont

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ \Omega &= 2\pi \\ x'_0 &= 1 \end{aligned}$$

Amplitude y_1 crête à crête (voir figure ci-dessous)

- si y_1 est l'amplitude qui correspond à une impulsion u
- si y est l'amplitude qui correspond à une impulsion ΔV
- le système étant linéaire, on a la relation : $y = y_1 \frac{\Delta V}{u}$

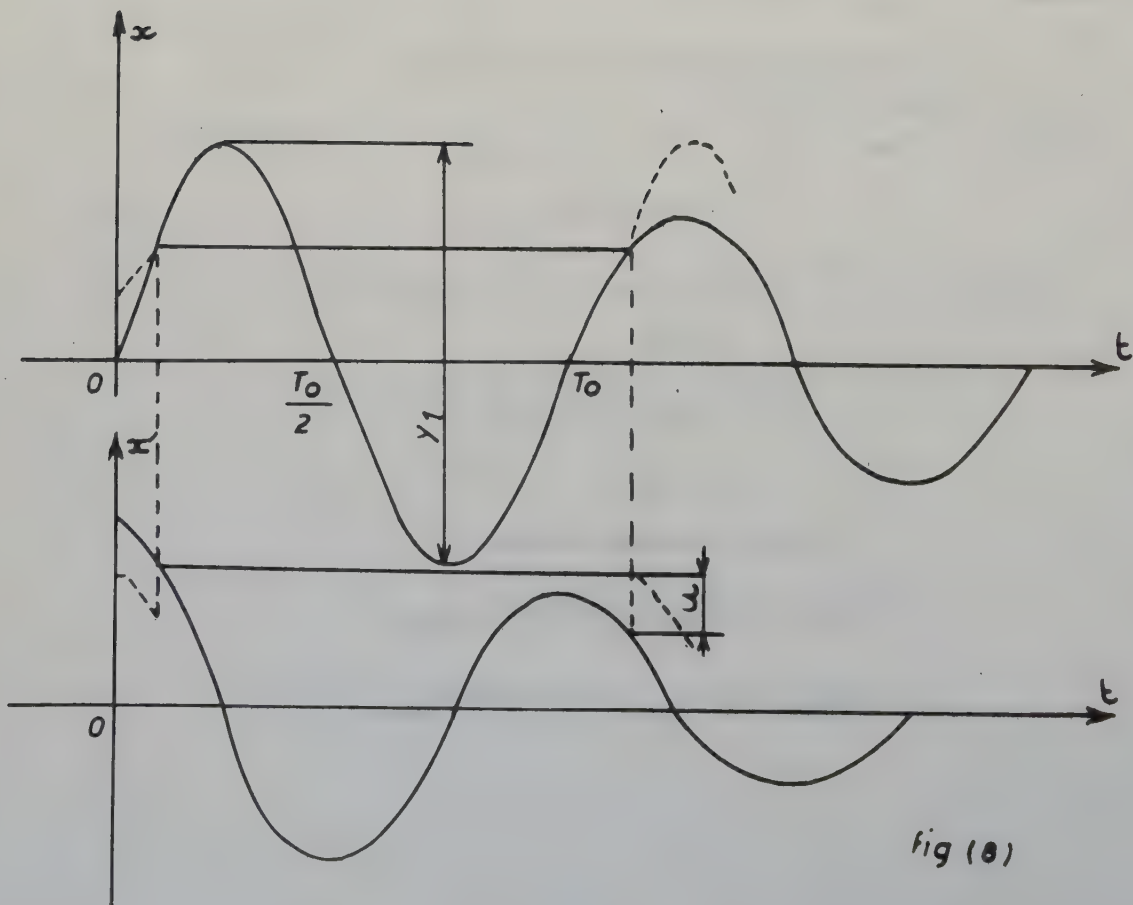
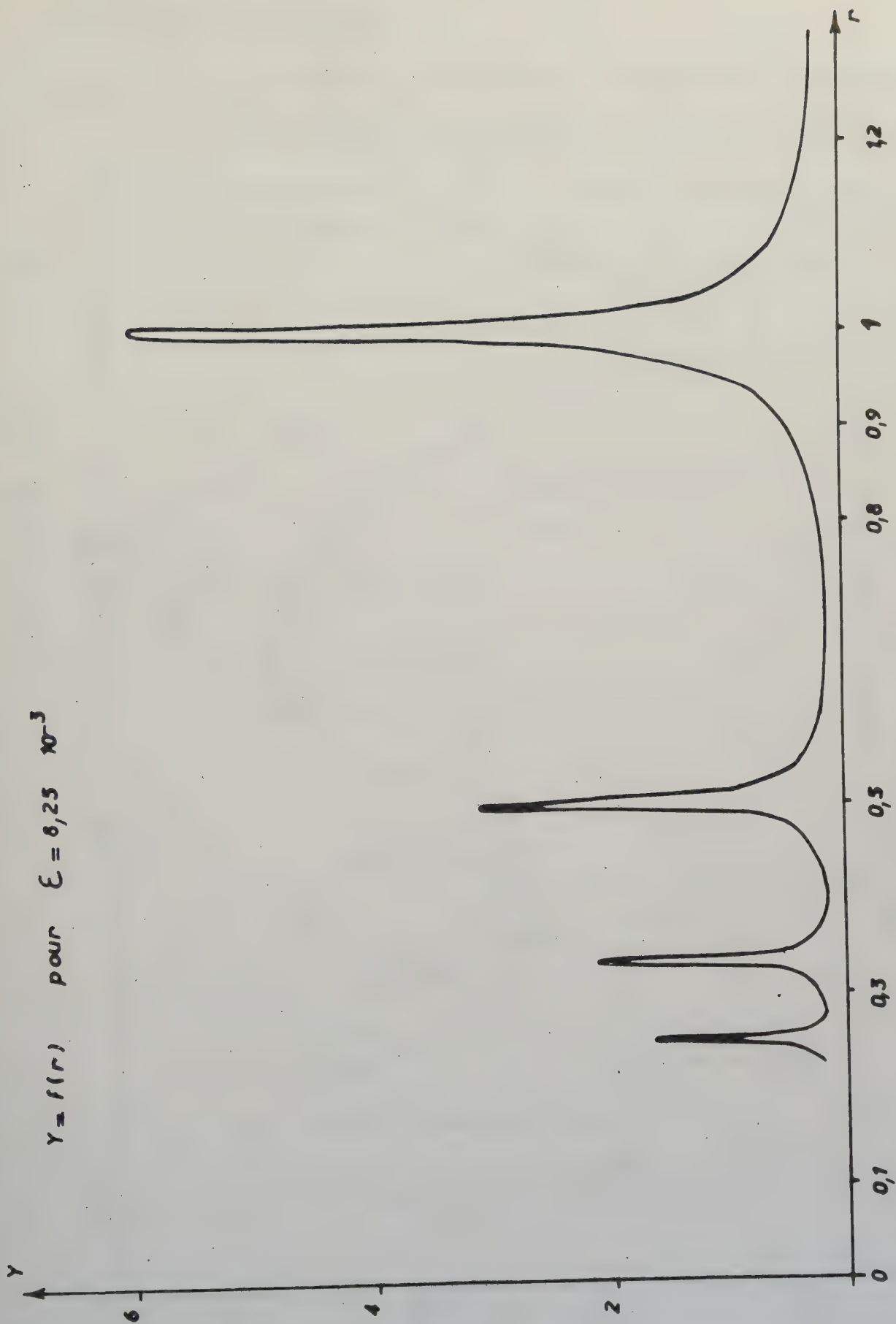
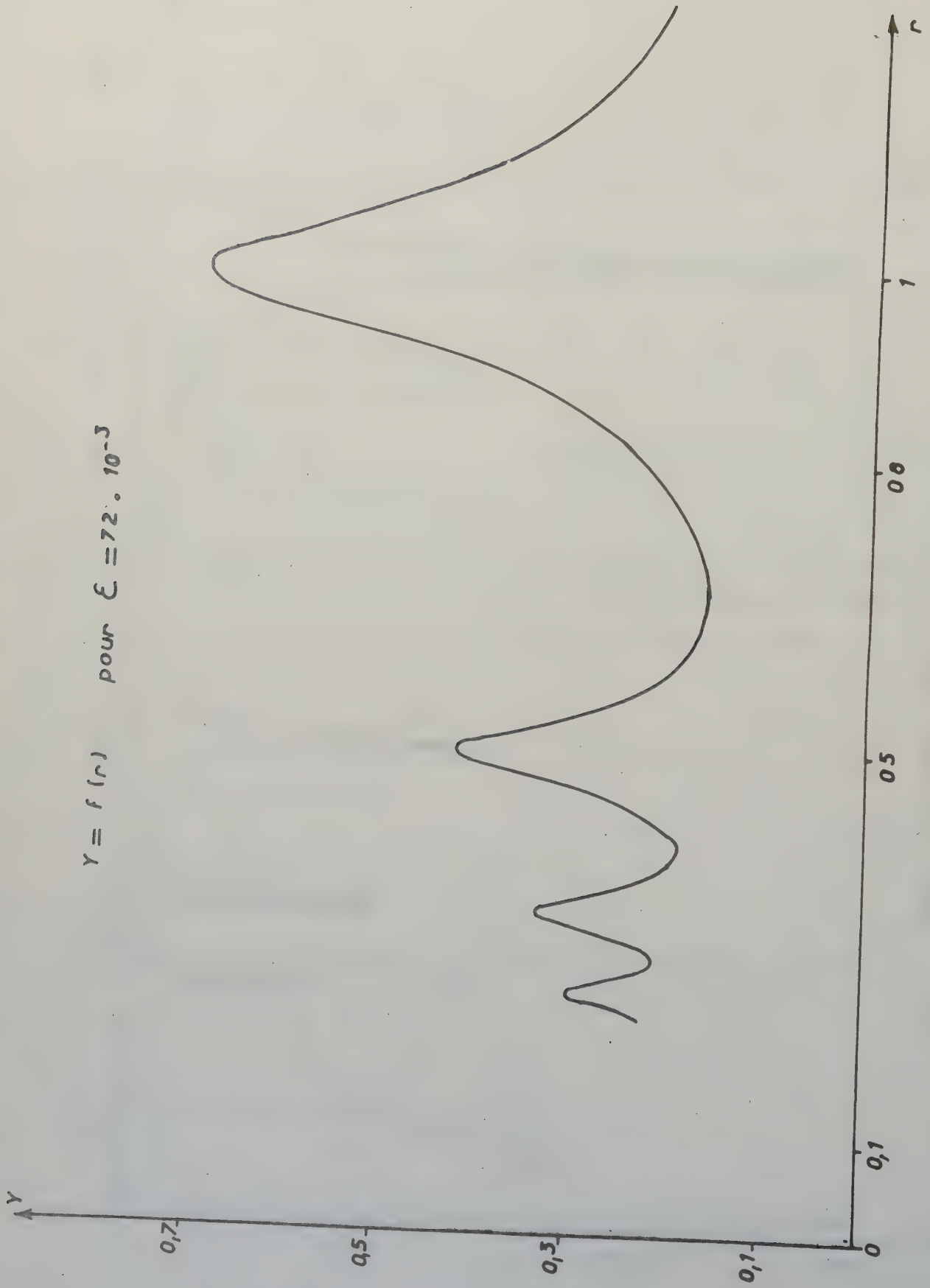


fig (a)



$\gamma = f(r)$ pour $\mathcal{E} = 72 \cdot 10^{-3}$



7°) Maxima et minima sont alignés

Ceci est valable pour ε petit c'est-à-dire ε^2 négligeable devant ε . Pour les maxima et minima de C , on a $\Omega T = k\pi$.

Nous allons faire le calcul des maxima de l'amplitude de y et y' des vibrations. (On montrerait de la même façon que ce raisonnement est valable pour les minima de y et y')

Pour les maxima de C on a $\Omega T = 2K\pi$. Ceci, nous l'avons vu, entraîne, que $\Omega t_0 = \frac{3\pi}{2}$ pour $T_0 < T$ avec cependant

$$T \simeq n T_0$$

$$y = C_1 \left(1 + e^{-\frac{\lambda}{2} \pi} \right) \text{ avec } C_1 = C e^{-\lambda t_m} \cos \varphi$$

$$y' = |x'(t_0)| + |x'(t_{M+1})| \text{ soit}$$

$$y' = C \omega_0 \cos \psi e^{-\frac{\lambda}{\Omega} \frac{3\pi}{2}} \left[1 + e^{-\frac{\lambda}{\Omega} (\pi + 2\psi)} \right]$$

Les expressions sont valables pour y_1, y_2, y_3 , etc ..., seul C varie.

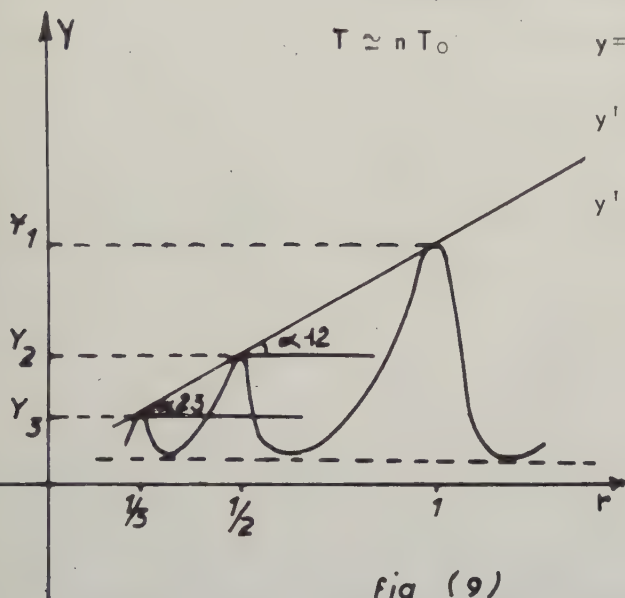


fig (9)

Les maxima seront alignés si $\text{tg } \alpha_{12} = \text{tg } \alpha_{23} = \text{tg } \alpha_{ij}$

$$\text{tg } \alpha_{ij} = \frac{y_i - y_j}{r_i - r_j}$$

soit :

$$\text{tg } \alpha_{12} = \frac{2e^{-\lambda t_m}}{\omega_0 e^{-\frac{\lambda 3\pi}{2\Omega}} \sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \left[\frac{1}{1 - e^{-\frac{\lambda 2\pi}{\Omega}}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{\lambda 4\pi}{\Omega}}} \right] \text{ en développant en série et en négligeant les termes d'ordre supérieurs ou égaux à } \varepsilon^2$$

$$\text{tg } \alpha_{12} = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\Omega} (\frac{\pi}{2} + \psi)}}{\omega_0 2\pi \varepsilon} = \text{tg } \alpha_{ij}$$

$\text{tg } \alpha_{ij}$ est une constante pour ε donné et les maxima sont donc bien alignés

Un calcul analogue pour les maxima de y' donnerait :

$$\text{tg } \alpha'_{ij} = \frac{y'_i - y'_j}{r_i - r_j} = \frac{1 + e^{-\frac{\lambda}{\Omega} (\pi + 2\psi)}}{2\pi \varepsilon}$$

$\text{tg } \alpha'_{ij}$ est constant pour ε donné et les maxima de y' sont aussi alignés.

8°) Mesure de l'amortissement en fonction de 2 maxima successifs

(application des résultats de la page précédente)

voir fig. 9

Pour y_1 on a $\Omega T = 2\pi$

Pour y_2 on a $\Omega T = 4\pi$

Pour y_3 on a $\Omega T = 6\pi$

Pour y_4 on a $\Omega t_0 = 8\pi$

$$\text{On a } \frac{y_1}{y_2} = \frac{1 - e^{-\frac{\lambda 4\pi}{\Omega}}}{1 - e^{-\frac{\lambda 2\pi}{\Omega}}} \quad k_{12} = \frac{C_1(4\pi)}{C_2(2\pi)} = \frac{C(4\pi)}{C(2\pi)}$$

$$K_{ij} = \frac{y_i}{y_j}$$

Après un rapide calcul, on montre :

$$K_{ij} = \frac{y'_i}{y'_j}$$

Les courbes k_{12} , k_{13} , k_{23} sont tracées à partir de résultats donnés par l'ordinateur en fonction de ε

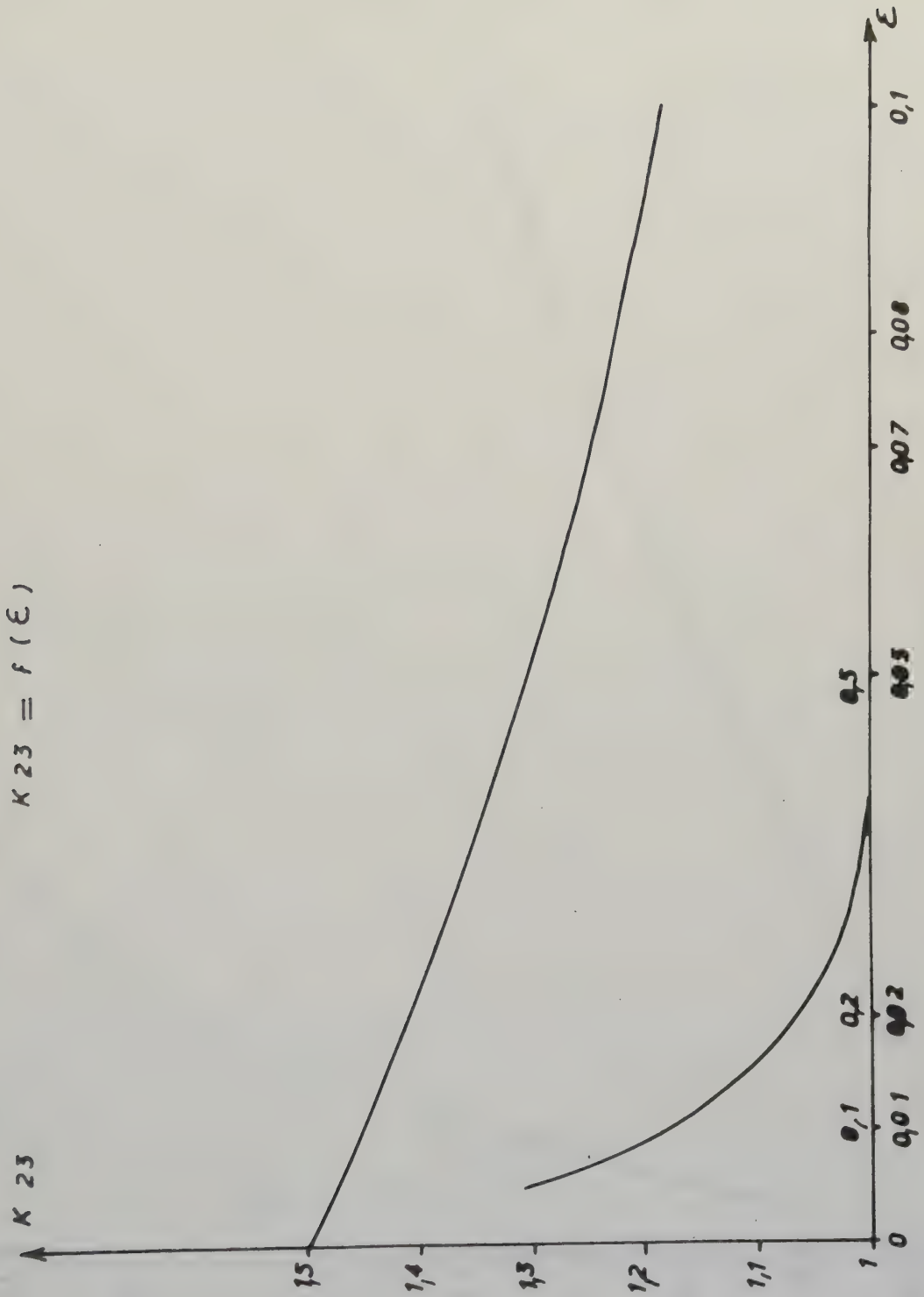
$$k_{12} = \frac{1 - e^{-\frac{\lambda 4\pi}{\Omega}}}{1 - e^{-\frac{\lambda 2\pi}{\Omega}}}$$

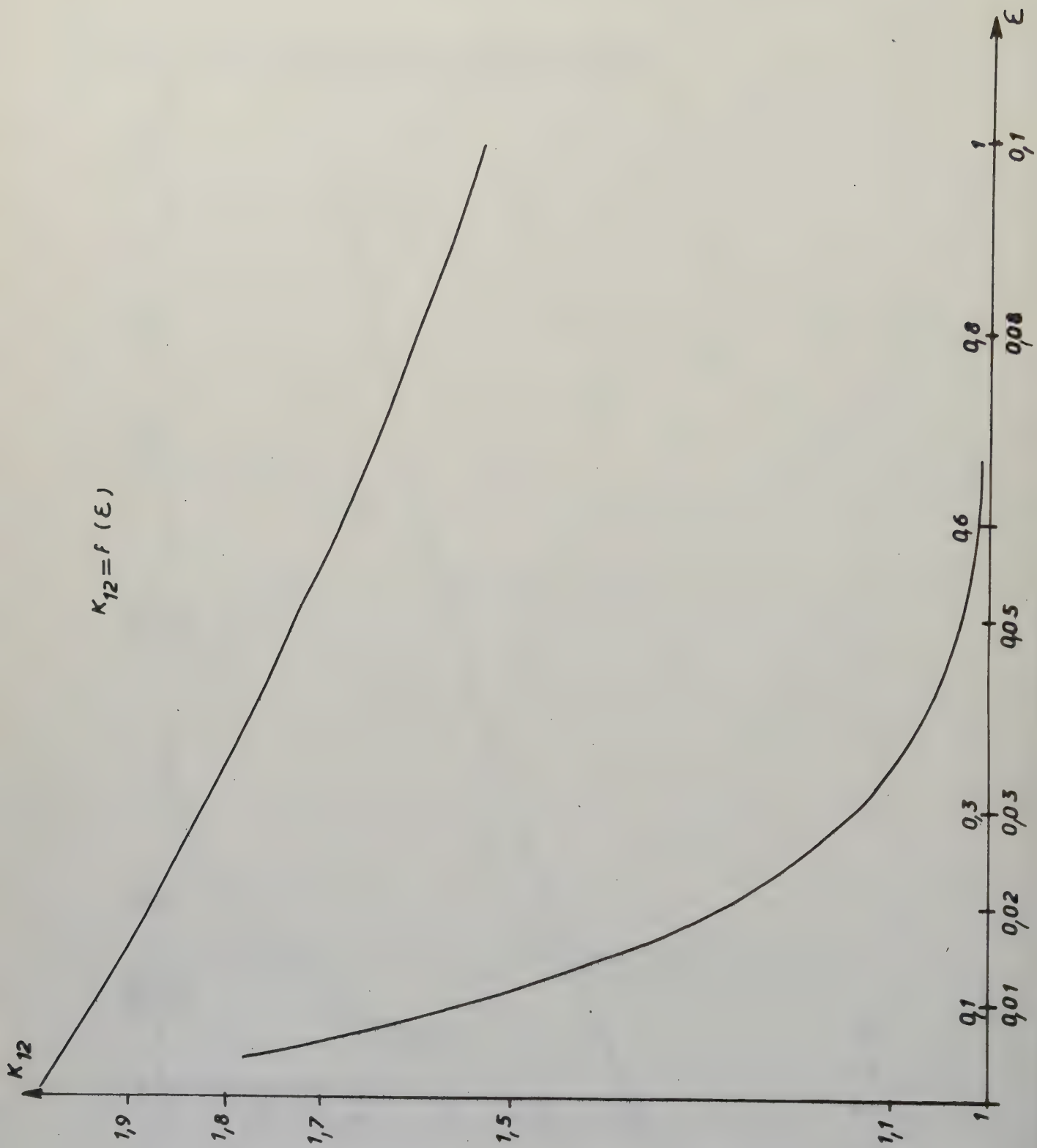
$$k_{13} = \frac{1 - e^{-\frac{\lambda 6\pi}{\Omega}}}{1 - e^{-\frac{\lambda 2\pi}{\Omega}}}$$

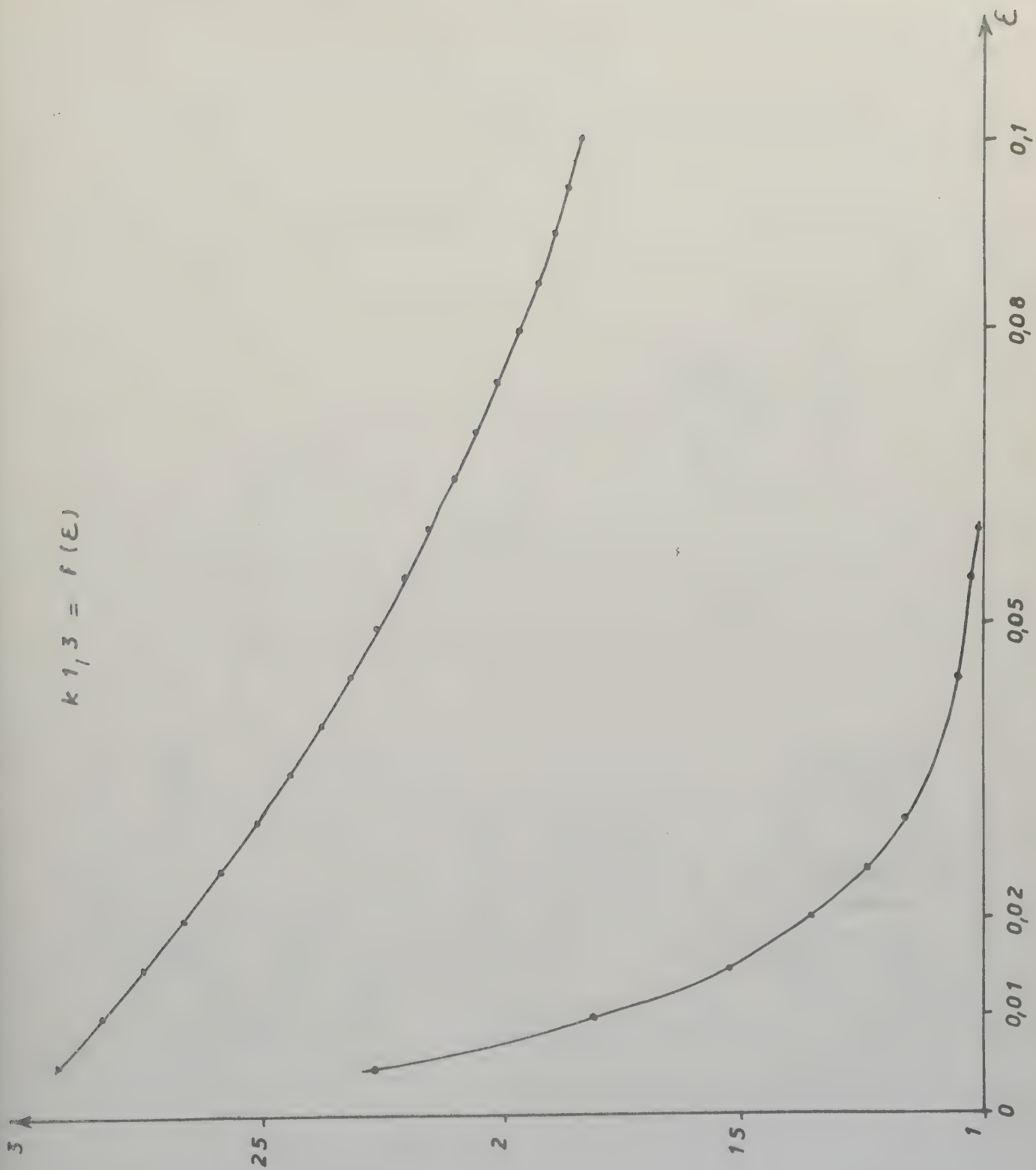
$$k_{23} = \frac{1 - e^{-\frac{\lambda 6\pi}{\Omega}}}{1 - e^{-\frac{\lambda 4\pi}{\Omega}}}$$

$$\text{avec } \frac{\lambda}{\Omega} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Connaissant le rapport de deux maximum, nous pouvons en déduire l'amortissement ε du système.



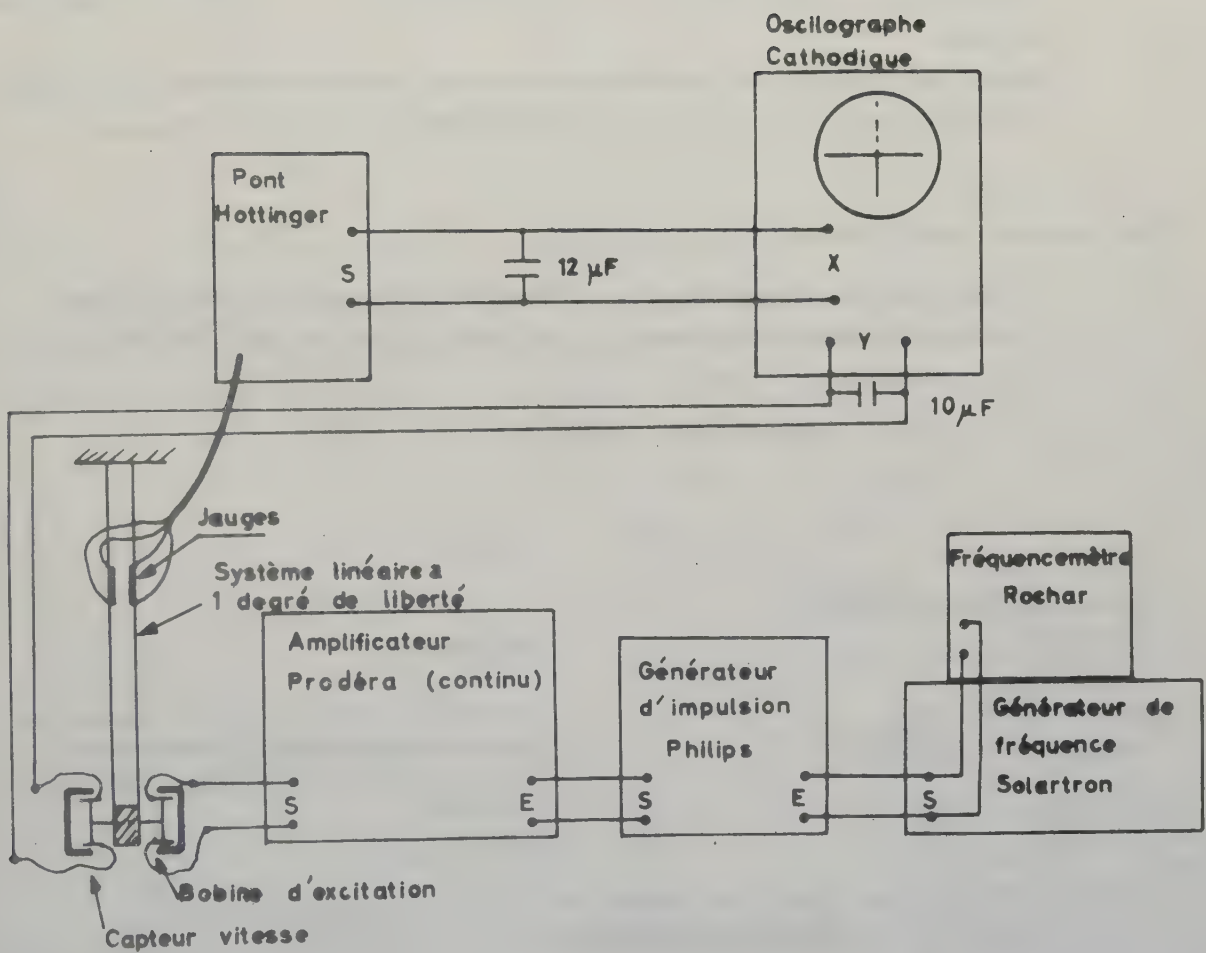




Chapitre III

Etude expérimentale

1°) Schéma du système



Chaîne d'excitation :

La chaîne d'excitation se compose d'un générateur de fréquence (Solartron) pilotant un générateur d'impulsion (Philips) ; l'impulsion passe ensuite à travers un amplificateur Prodéra (continu) ; enfin, le signal obtenu excite le système en traversant une bobine du type excitation .

On mesure la fréquence d'excitation à l'aide d'un fréquencemètre Rochar branché aux bornes du générateur de fréquence Solartron.

Chaîne de mesure :

La chaîne de mesure se compose d'un capteur vitesse (bobine du type Prodéra) branchée aux bornes Y d'un oscillographe cathodique, d'un capteur déplacement composé de deux jauges reliées à un pont (Hottinger) (montage demi-pont) ; la sortie du pont est reliée aux bornes X de l'oscillographe cathodique .

On mesure les amplitudes de la vitesse et déplacement directement sur l'écran de l'oscillographe .

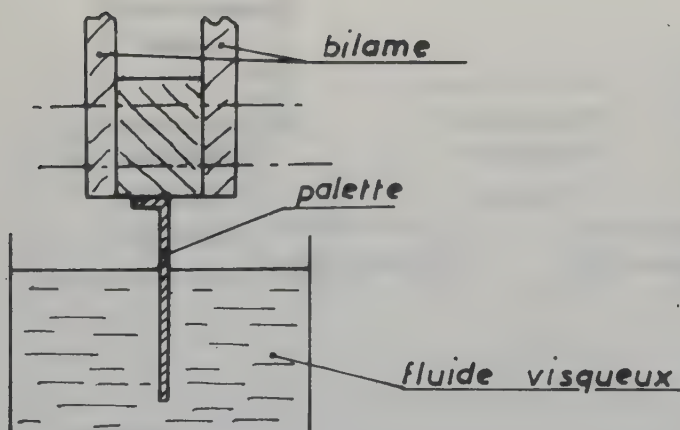
Deux condensateurs ($10 \mu F$ et $12 \mu F$) aux bornes X et Y filtrent les hautes fréquences .

Tracé des courbes expérimentales

Les courbes sont tracées pour des valeurs différentes de ε . Une palette en bout du système (voir figure 10) permet de faire varier ε lorsque celle-ci baigne dans des fluides dont les viscosités sont différentes .

1er cas : palette dans l'air : Amortissement ε_1

2ème cas : « « l'huile « ε_2

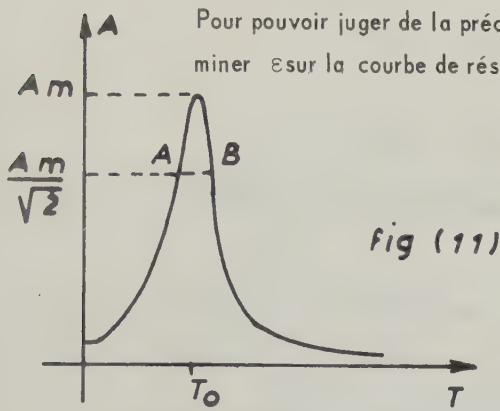


REMARQUE :

On ne peut pas faire des mesures comparatives pour les amplitudes des différentes courbes, car la masse du fluide entraînée modifie le système .

fig (10)

2°) Application à la mesure de l'amortissement



Pour pouvoir juger de la précision de la mesure de ε , on la compare à celle qui consiste à déterminer ε sur la courbe de résonance (voir fig. 11)

$$AB = \Delta T \quad \text{et on a} \quad 2\varepsilon = \frac{\Delta T}{T_0}$$

fig (11)

Calcul de la valeur ε_1

$$y_1' = 870 \pm 5 \text{ mV}$$

$$\frac{\Delta y_1'}{y_1'} = 0,57 \cdot 10^{-2}$$

$$y_2' = 450 \pm 5 \text{ mV}$$

$$\frac{\Delta y_2'}{y_2'} = 1,10 \cdot 10^{-2}$$

$$y_3' = 315 \pm 5 \text{ mV}$$

$$\frac{\Delta y_3'}{y_3'} = 1,56 \cdot 10^{-2}$$

$$K_{12} = 1,935$$

$$\Delta K_{12} = 3,1 \cdot 10^{-2}$$

$$K_{13} = 2,76$$

$$\Delta K_{13} = 6 \cdot 10^{-2}$$

$$K_{23} = 1,425$$

$$\Delta K_{23} = 3,9 \cdot 10^{-2}$$

$$K_{12} \text{ donne } \varepsilon_{12} = 10,5 \cdot 10^{-3} \quad \text{mais avec} \quad 6 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{12} < 18 \cdot 10^{-3}$$

$$K_{13} \text{ „ } \varepsilon_{13} = 13,5 \cdot 10^{-3} \quad \text{„ } \text{ „ } \quad 10 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{13} < 17,5 \cdot 10^{-3}$$

$$K_{23} \text{ „ } \varepsilon_{23} = 17,5 \cdot 10^{-3} \quad \text{„ } \text{ „ } \quad 8 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{23} < 27,5 \cdot 10^{-3}$$

Par l'autre méthode, on trouve que :

$$\varepsilon_1 = (8,25 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$$

On peut expliquer l'écart des deux méthodes en précisant que l'amortissement mesuré est un amortissement interne qui dépend de l'amplitude ; or, celle-ci intervient dans la mesure des rapports k_{ij} .

Calcul de la valeur ε_2 .

$$y_1^I = 35,5 \pm 0,25 \text{ mV} \quad \frac{\Delta y_1^I}{y_1^I} = 0,7 \cdot 10^{-2}$$

$$y_2^I = 22 \pm 0,25 \text{ mV} \quad \frac{\Delta y_2^I}{y_2^I} = 1,1 \cdot 10^{-2}$$

$$y_3^I = 18 \pm 0,25 \text{ mV} \quad \frac{\Delta y_3^I}{y_3^I} = 1,4 \cdot 10^{-2}$$

$$\begin{array}{lll} K_{12} = 1,61 \pm 3 \cdot 10^{-2} \text{ donne} & \varepsilon_{12} = 79 \cdot 10^{-3} \text{ soit} & 71 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{12} < 86 \cdot 10^{-3} \\ K_{13} = 1,97 \pm 4 \cdot 10^{-2} \text{ «} & \varepsilon_{13} = 79 \cdot 10^{-3} \text{ «} & 71,5 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{13} < 84 \cdot 10^{-3} \\ K_{23} = 1,225 \pm 3 \cdot 10^{-2} \text{ «} & \varepsilon_{23} = 80 \cdot 10^{-3} \text{ «} & 70 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{23} < 95 \cdot 10^{-3} \end{array}$$

Par l'autre méthode, on trouve que :

$$\varepsilon_2 = 72 \cdot 10^{-3} \pm 2 \cdot 10^{-3}$$

On peut remarquer que la précision de la mesure est bonne, qu'il y a peu d'écarts entre les ε_{ij} ; ceci s'explique par l'amortissement visqueux important, c'est-à-dire dépendant très peu de l'amplitude, alors que, pour la valeur de l'amortissement précédent, on mesurait l'amortissement interne qui dépendait aussi du déplacement.

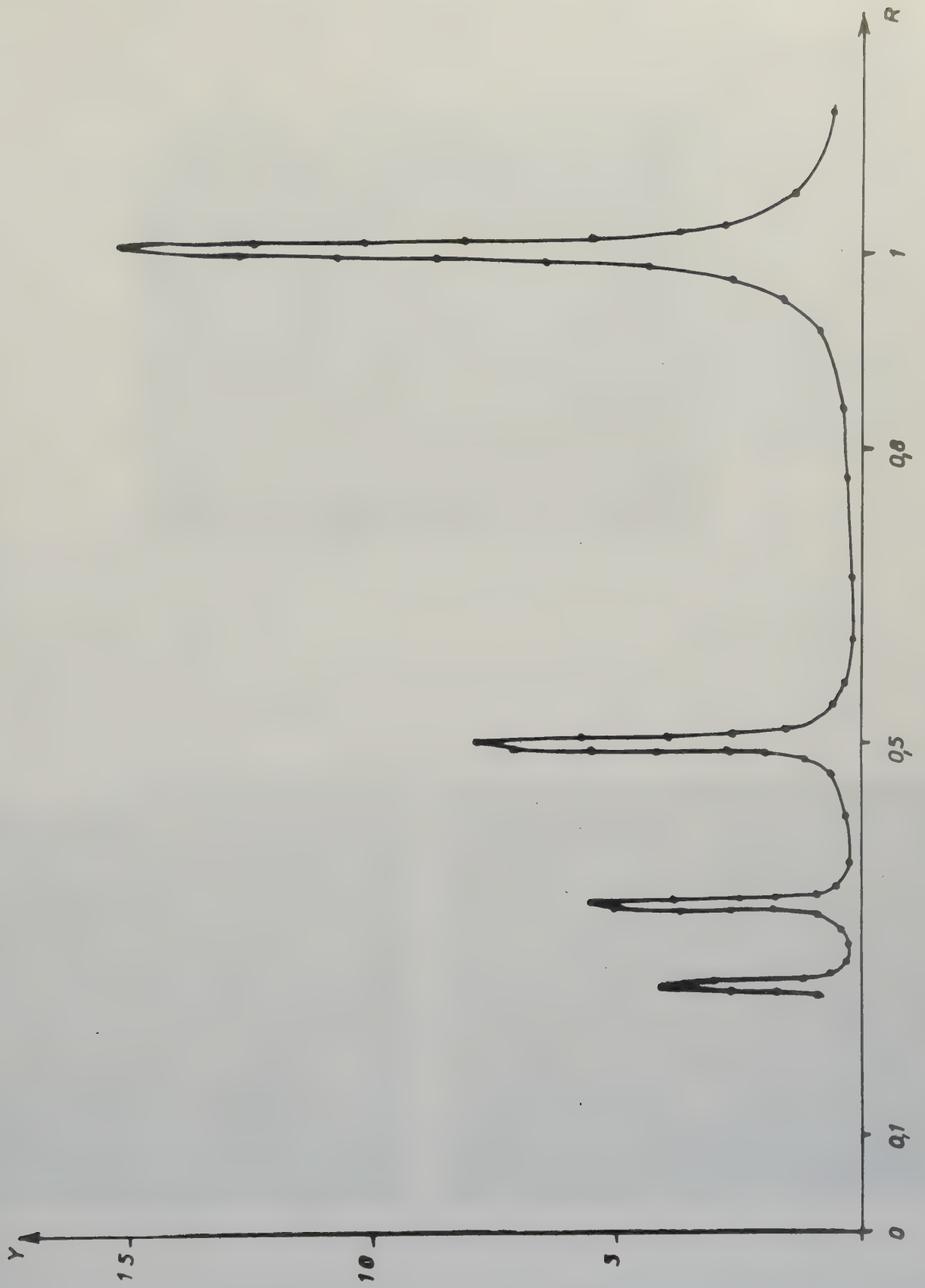
3°) Courbes expérimentales :

pages 31, 32,

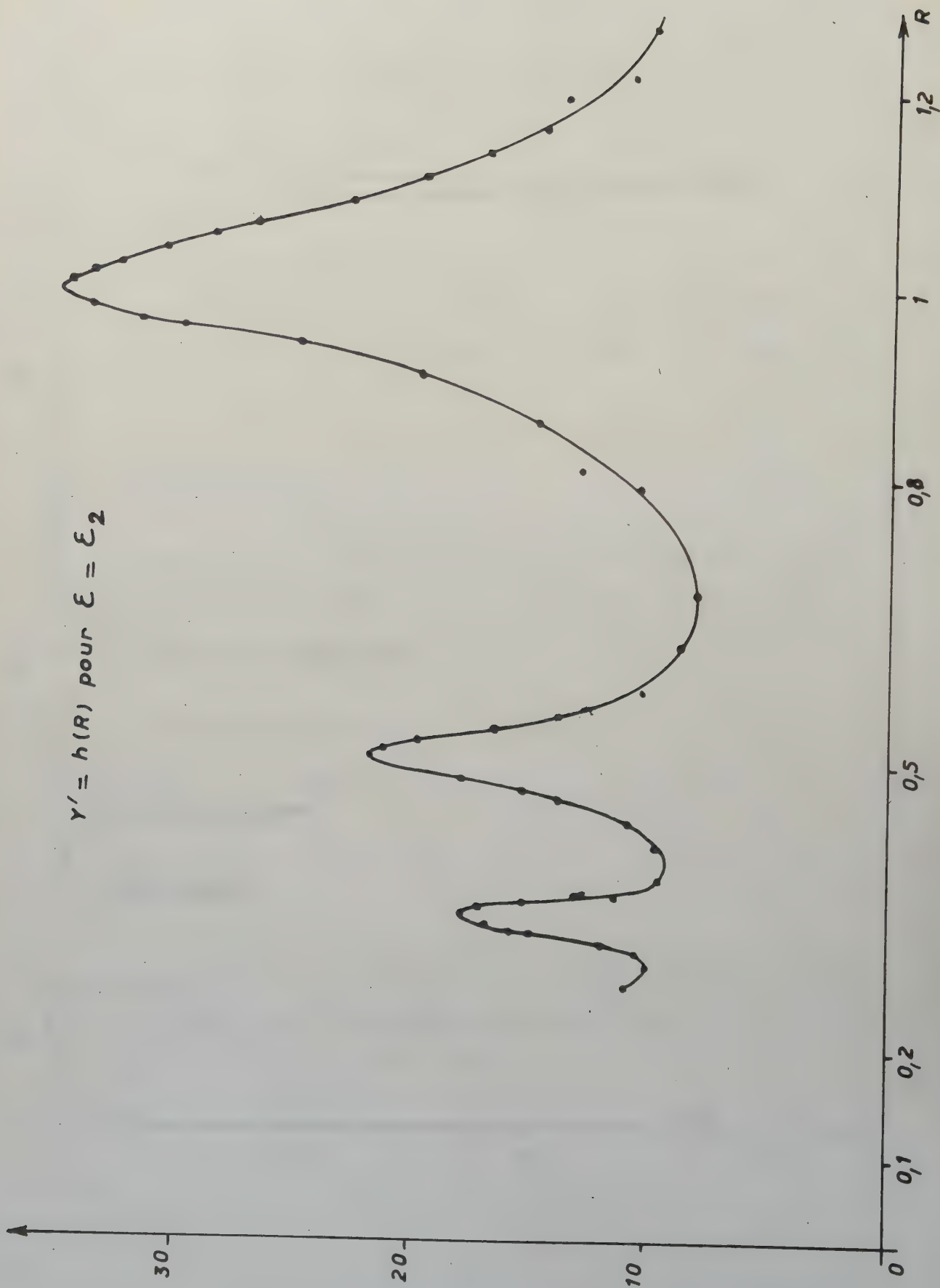
4°) Conclusion

Cette étude des systèmes à un degré de liberté nous a permis de vérifier la parfaite concordance entre la théorie et l'expérience : mêmes courbes de résonance; les maxima et les minima sont alignés pour un faible amortissement. Cette méthode présente, en outre, un intérêt pratique qui est l'application de cette théorie à la mesure d'amortissements visqueux.

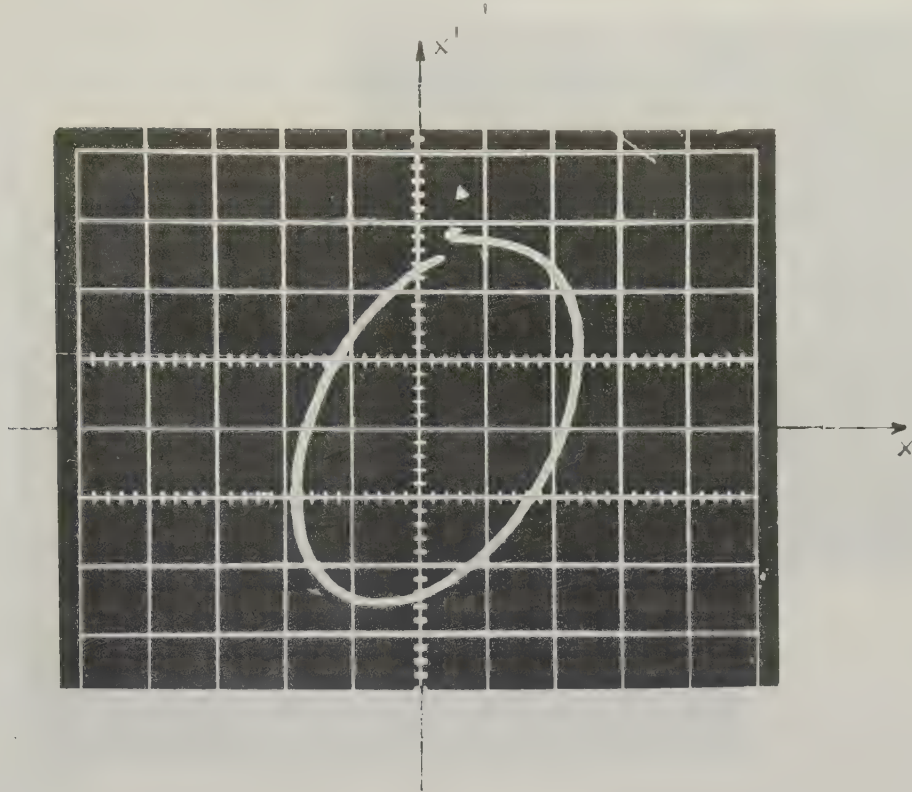
$\gamma = f(r)$ pour $\varepsilon = \varepsilon_1$



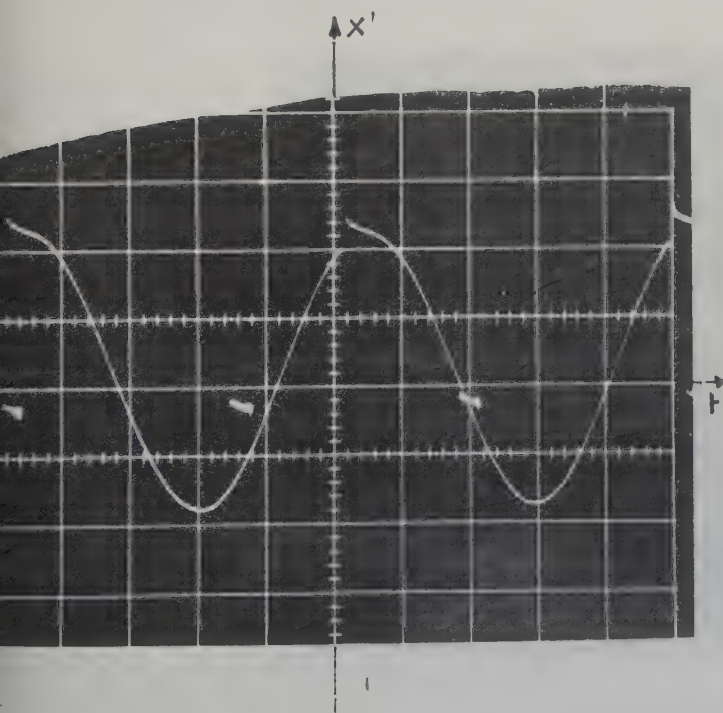
$$Y' = h(R) \text{ pour } \mathcal{E} = \mathcal{E}_2$$



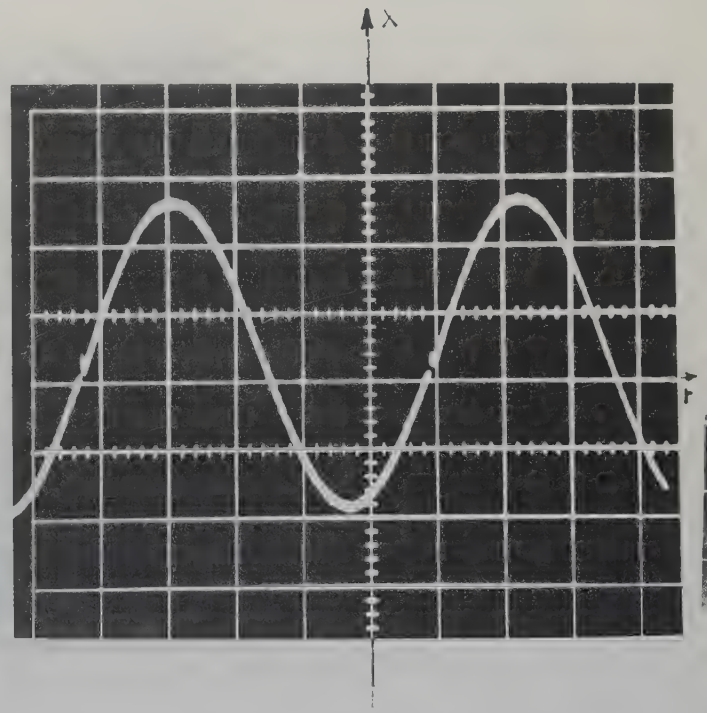
Photographies du mouvement prises à l'oscillographe :



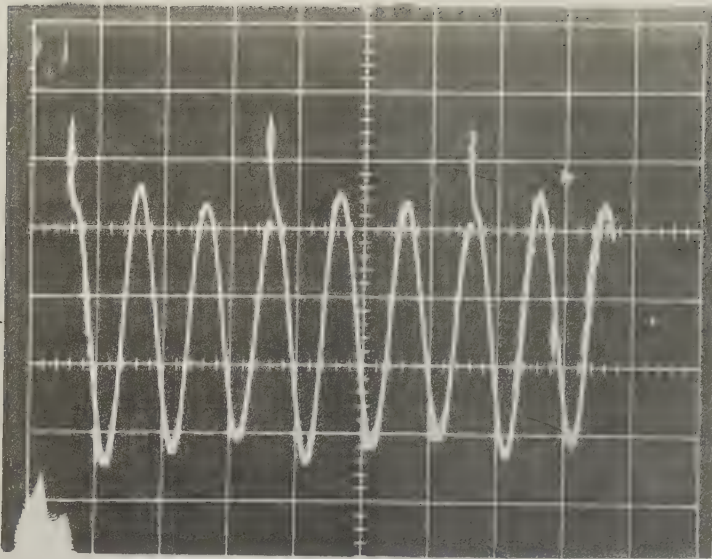
Ici on a une allure du cycle (le déphasage important est dû aux condensateurs)



Allure de la vitesse pour période des impulsions =
période du système ($\varepsilon = 23 \cdot 10^{-3}$)



Allure du déplacement pour période des impulsions
période du système $\varepsilon = (23 \cdot 10^{-3})$

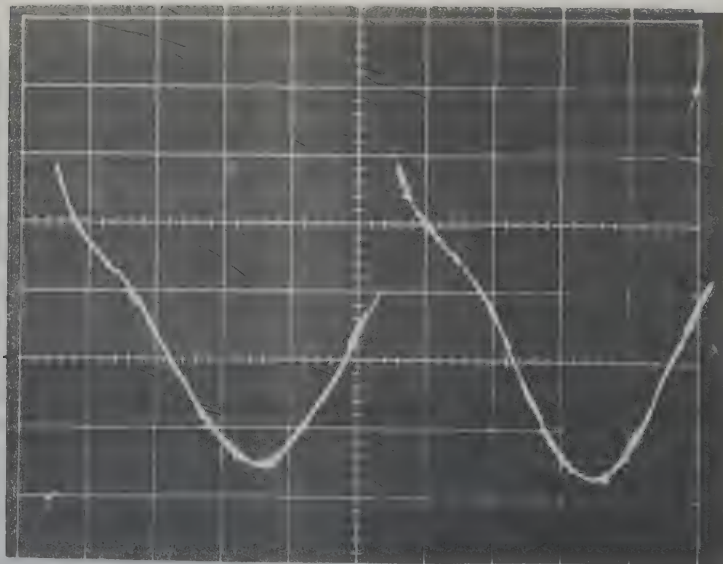


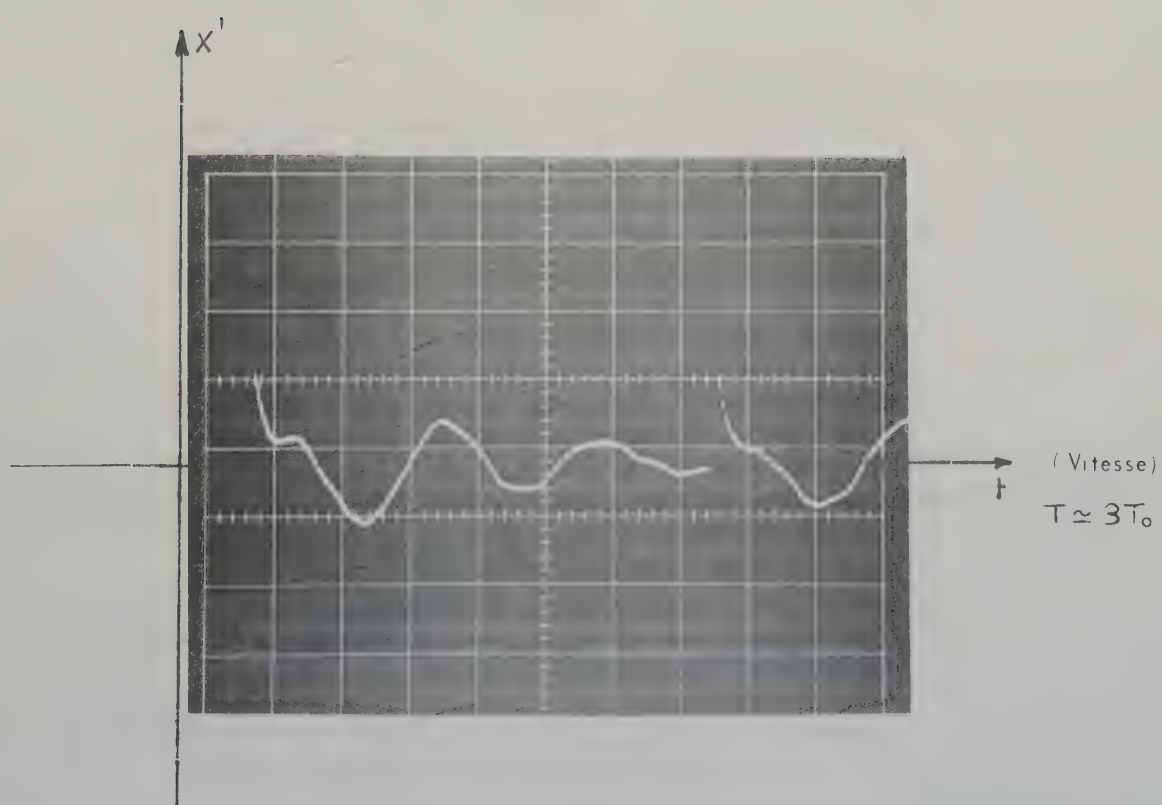
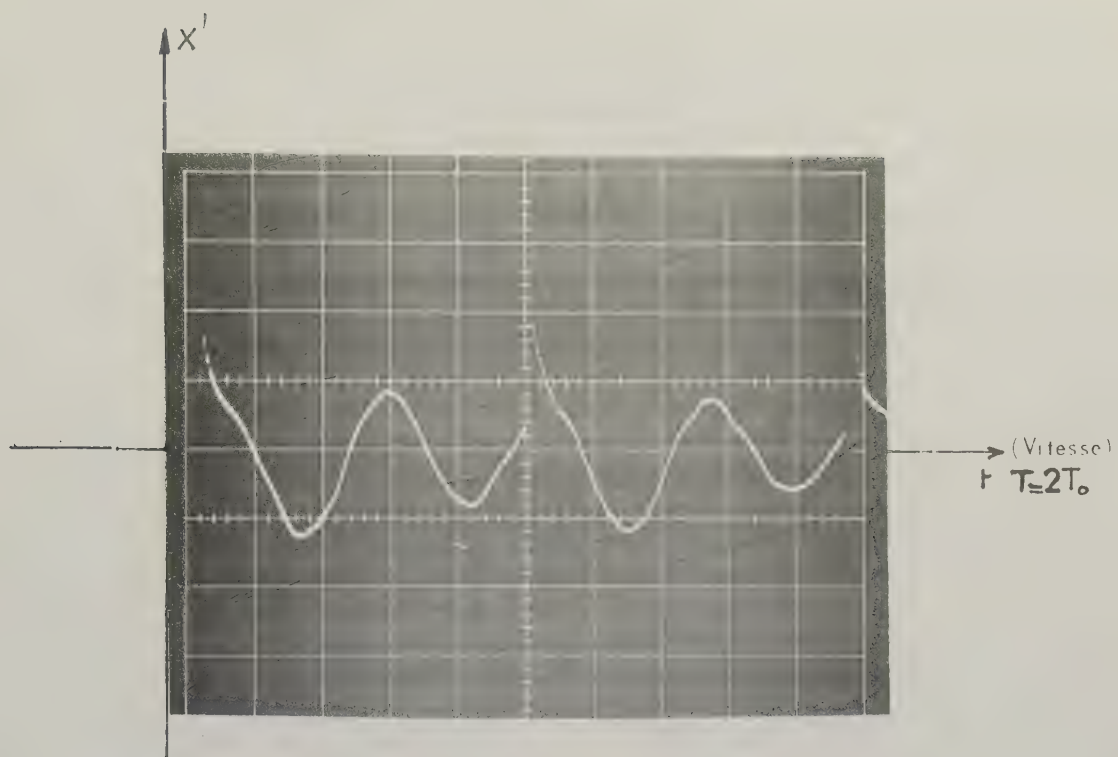
T période propre du système

T période des impulsions

Vitesse ($\sim 23.10^{-3}$)

$\varepsilon = 7.2.10^{-3}$ dans ce cas, on ne mesure que la vitesse.





Chapitre I

Système à un degré de liberté non linéaire et conservatif

(caractéristique à deux pentes) excité par impulsions ou chocs périodiques

1°) Généralités .

On étudie le système à un degré de liberté non linéaire et conservatif qui a pour équation du mouvement :

$$m x'' + F(x) = I(t) \quad (A)$$

$F(x)$ force de rappel du ressort (voir fig. 1)

$$F(x) = K_1 x \text{ pour } -a \leq x \leq a$$

$$F(x) = K_1 a + K_2 (x - a) \text{ pour } x \geq a$$

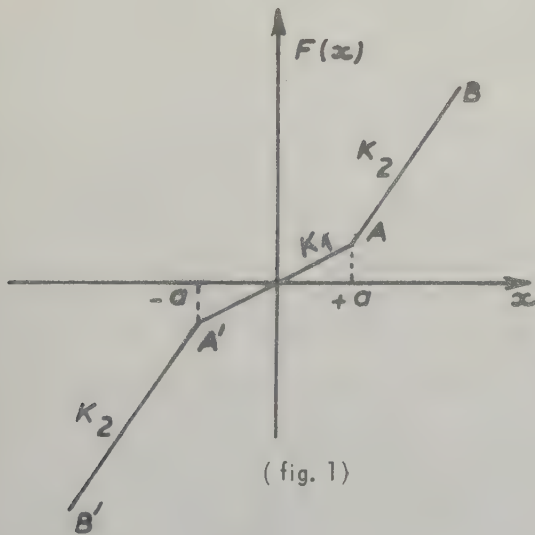
$$F(x) = -K_1 a + K_2 (x + a) \text{ pour } x \leq -a$$

$I(t)$ impulsion ou choc périodique de période T

m : masse du système

K_1 : pente de la droite $A'A$

K_2 : pente des droites AB et $A'B'$



(fig. 1)

Une impulsion ou un choc entraîne une discontinuité sur la vitesse, entre deux impulsions, les oscillations sont des oscillations libres, ce qui nous amène à étudier la solution propre de l'équation :

$$m x'' + F(x) = 0 \quad (B)$$

2 cas peuvent se présenter :

a) $-a \leq x \leq +a$

La solution de B devient celle de $mx'' + K_1 x = 0$

Dans le plan des phases, le point $M(x, \frac{x'}{v})$ décrit un cercle centré à l'origine; cette solu-

tion a déjà été étudiée dans la première partie.

b) $x \geq a \quad \varepsilon = +1$

$x \leq a \quad \varepsilon = -1$

La solution (B) devient celle de : $m x'' + K_1 a + K_2 (x - a) = 0$

soit $m x'' + K_2 x = (K_2 - K_1) a$

Dans le plan des phases le point $M \left(x, \frac{x'}{\omega^2} \right)$ décrit un arc de cercle centré au point
d'abscisse $\varepsilon a \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2} \right) = \varepsilon d$

Conditions initiales :

$x_2(t=0) = A$

$x'_2(t=0) = 0$

avec $A > a$

Remarque : x' est continue au changement de pente mais $\frac{x'}{\omega_i}$ est discontinue à cause

de la discontinuité de $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}} \quad i = 1, 2$

2°) Calcul de la période propre

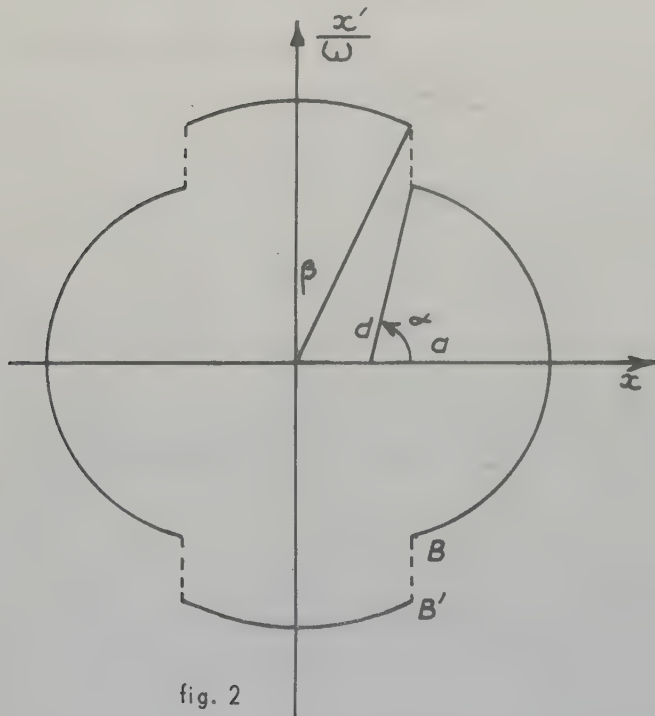


fig. 2

La période propre du mouvement pour une amplitude de vibration $2A$ est :

$$T_0 = \frac{4a}{\omega_2} + \frac{4\beta}{\omega_1}$$

α et β angles voir fig. 2

$$aB = \frac{x'}{\omega_2} = \sqrt{(A-d)^2 - (a-d)^2}$$

$$aB' = \frac{x'}{\omega_1} = \frac{x'}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot aB$$

$$\cos \alpha = \frac{a-d}{A-d} \quad \alpha = \text{Arc cos } \frac{a-d}{A-d}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{a}{\frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{(A-d)^2 - (a-d)^2}}$$

$$\beta = \text{Arc tg } \frac{a}{\frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{(A-d)^2 - (a-d)^2}}$$

d'où
$$T_0 = \frac{4}{\omega_2} \text{Arc cos } \frac{a-d}{A-d} + \frac{4}{\omega_1} \text{Arc tg } \frac{a}{\frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{(A-d)^2 - (a-d)^2}}$$

Remarque :

La période propre T_0 est fonction de la seule variable A , car a, d, ω_1, ω_2 sont des données du problème étudié.

3°) Calcul de la période des impulsions des chocs

Maintenant, excitons le système avec des impulsions ou chocs périodiques. On sait qu'entre chaque impulsion ou choc, le système oscille avec sa pulsation propre.

Tous les cas possibles pour $0 < T \leq T_0$ sont :

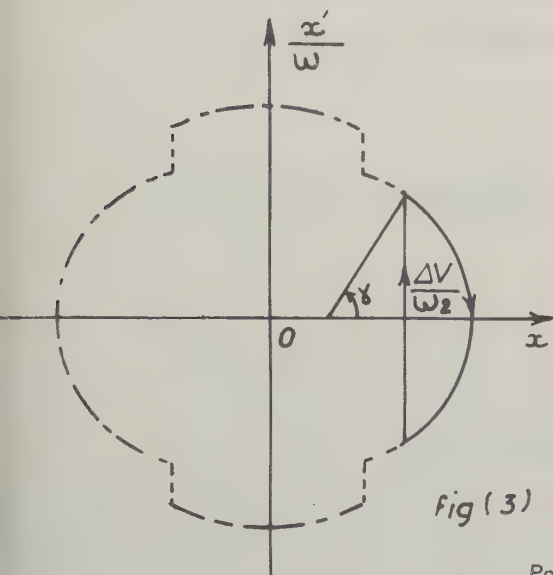


Fig (3)

- $0 < T \leq \frac{2\alpha}{\omega_2}$ $T = \frac{2\gamma}{\omega_2}$ (fig.3)

- $\frac{2\alpha}{\omega_2} \leq T \leq \frac{T_0}{2}$ $T = 2\alpha + 2\frac{(\beta-\delta)}{\omega_1}$ (fig.4)

- $\frac{T_0}{2} \leq T \leq T_0 - \frac{2\alpha}{\omega_2}$ $T = \frac{T_0}{2} + \frac{2\delta}{\omega_1}$ (fig.5)

- $T_0 - \frac{2\alpha}{\omega_2} \leq T \leq T_0$ $T = T_0 - \frac{2\gamma}{\omega_2}$ (fig.6)

Pour $n T_0 \leq T \leq (n+1) T_0$ les formules précédentes deviennent :

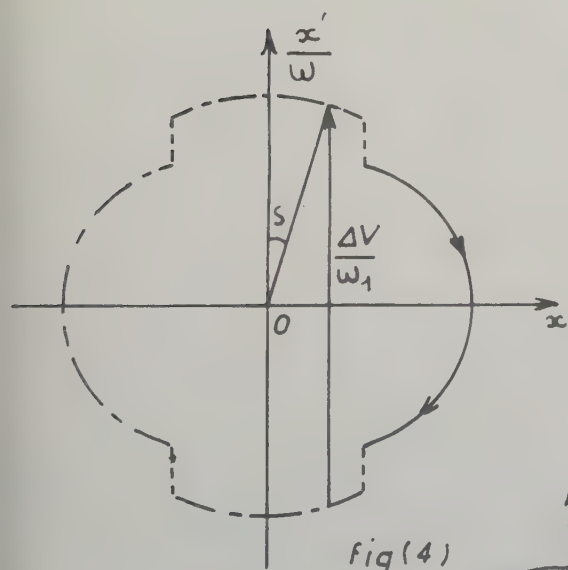


Fig (4)

- $n T_0 \leq T \leq n T_0 + \frac{2\alpha}{\omega_2}$ $T = n T_0 + \frac{2\gamma}{\omega_2}$ (fig.3)

- $n T_0 + \frac{2\alpha}{\omega_2} \leq T \leq n T_0 + \frac{T_0}{2}$ $T = n T_0 + \frac{2\alpha}{\omega_2} + \frac{2(\beta-\delta)}{\omega_1}$ (fig.4)

- $n T_0 + \frac{T_0}{2} \leq T \leq (n+1) T_0 - \frac{2\alpha}{\omega_2}$ $T = n T_0 + \frac{T_0}{2} + \frac{2\delta}{\omega_1}$ (fig.5)

- $(n+1) T_0 - \frac{2\alpha}{\omega_2} \leq T \leq (n+1) T_0$ $T = (n+1) T_0 - \frac{2\gamma}{\omega_2}$ (fig.6)

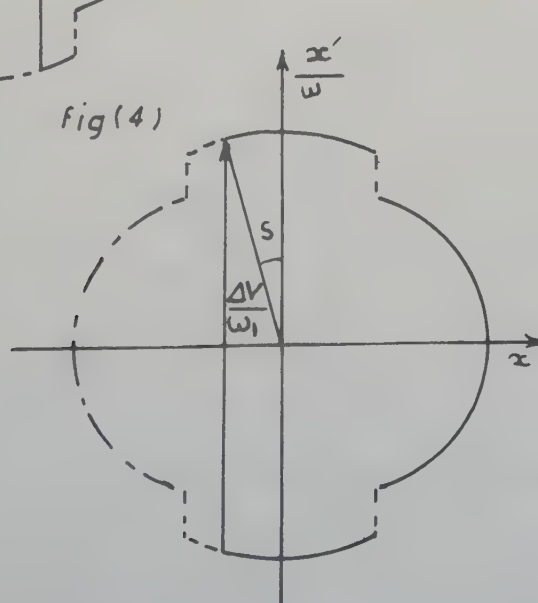


Fig (5)

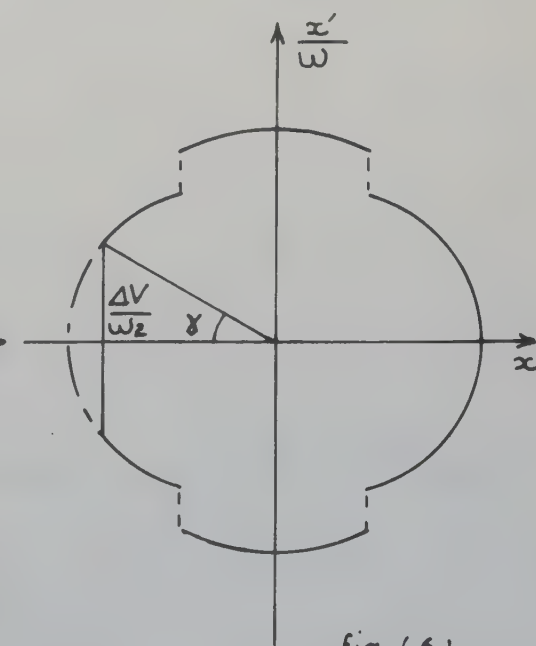


Fig (6)

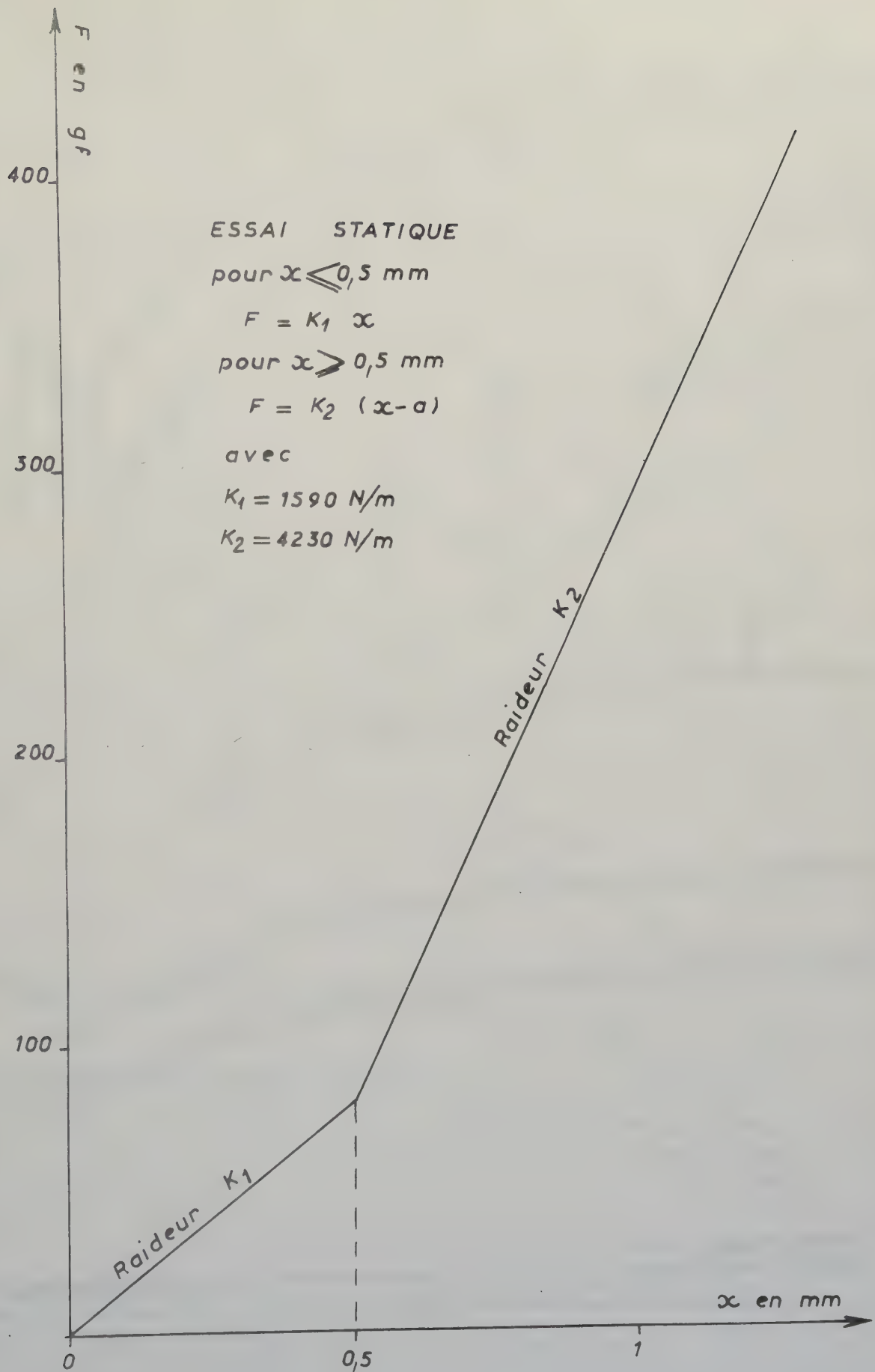
4^o) Tracé des courbes de résonance -

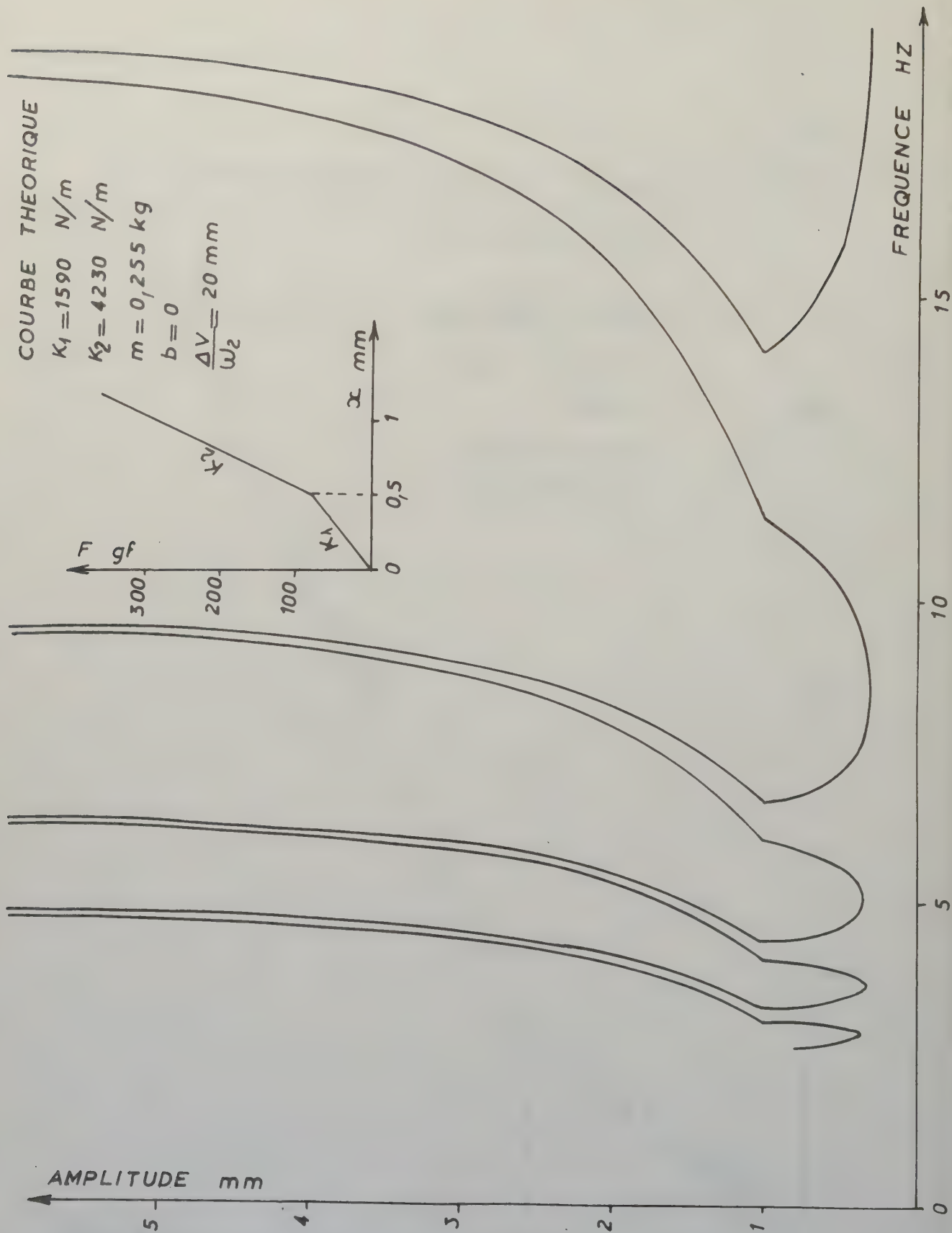
pages 42 - 43 - 44 ,.

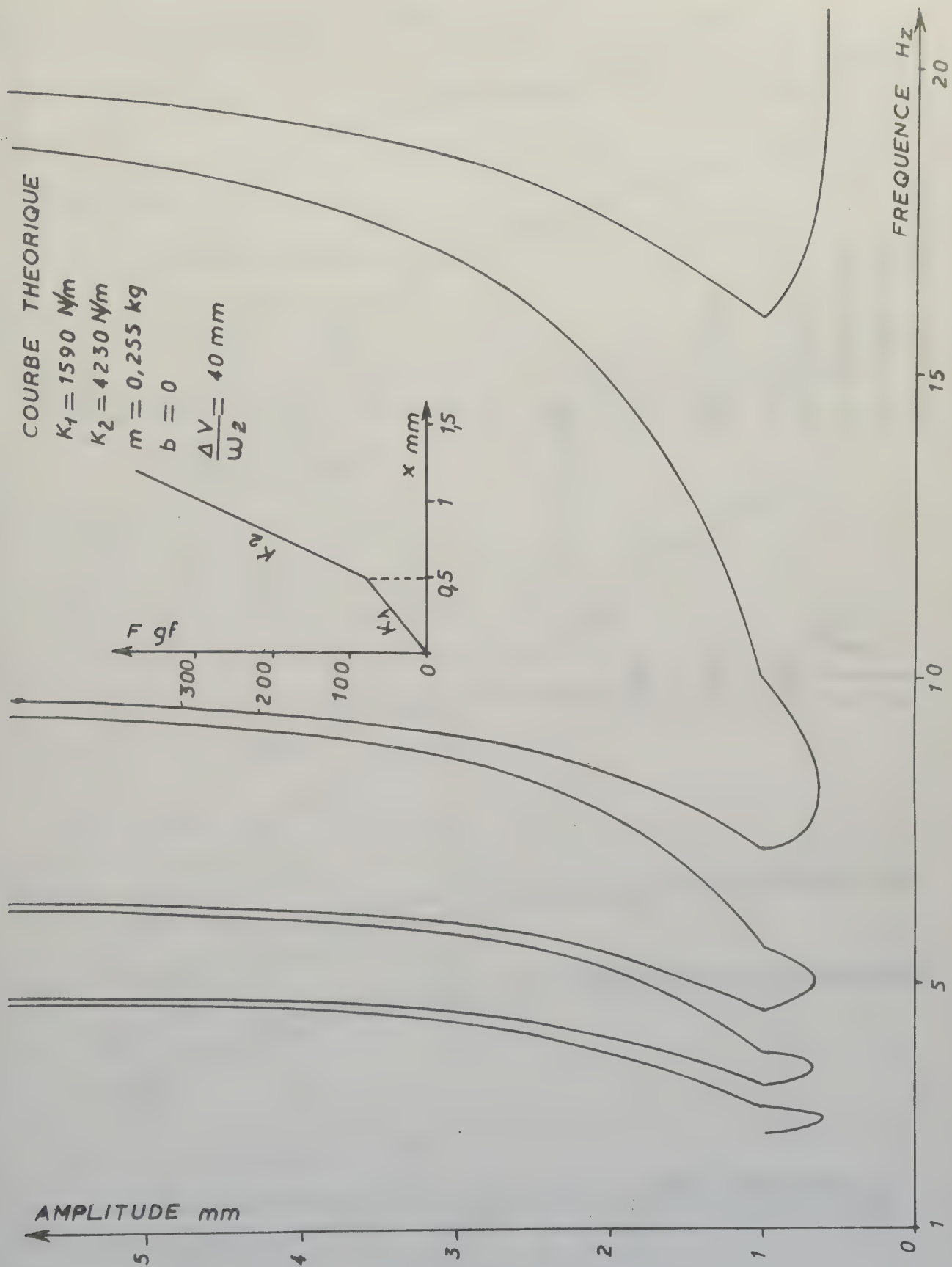
On détermine graphiquement les angles intervenant dans le calcul de la période par leurs lignes trigonométriques . Nous avons tracé trois courbes pour différentes valeurs de l'impulsion.

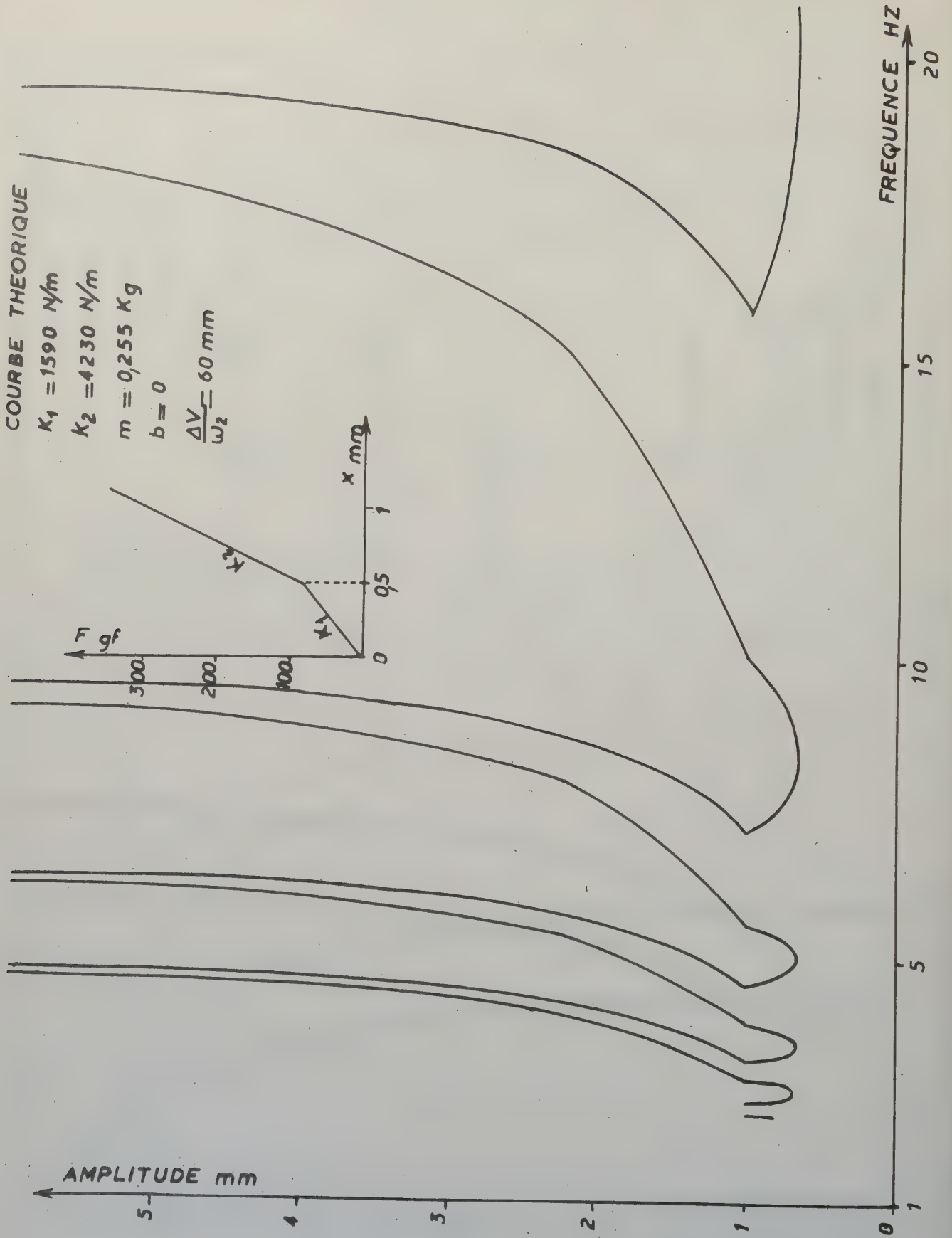
Remarque

On peut augmenter le nombre de tronçons de droites de la caractéristique, le calcul reste analogue au précédent.









Chapitre II

Système à un degré de liberté non linéaire et non conservatif

(caractéristique à deux pentes) excité par impulsions ou chocs périodiques

1°) Généralités

Le système à étudier a pour équation :

$$mx'' + bx' + F(x) = I(t)$$

Cette équation comporte en plus des termes définis au chapitre I, un terme d'amortissement bx' .

Comme nous l'avons déjà vu entre chaque impulsion ou choc, les oscillations sont des oscillations libres, ce qui nous amène à étudier la solution propre de l'équation : $mx'' + bx' + F(x) = 0$ (B)

2 cas peuvent se présenter :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x &\geq a & \varepsilon &= +1 \\ x &\leq -a & \varepsilon &= -1 \end{aligned}$$

(B) devient $mx'' + bx' + K_1 \varepsilon a + K_2 (x - \varepsilon a) = 0$

soit $mx'' + bx' + K_2 x = (K_2 - K_1) \varepsilon a$

Dans ce cas, on a un mouvement amorti autour du point d'abscisse $\varepsilon d = \frac{K_2 - K_1}{K_2} \varepsilon a$ qui est pris dans ce cas comme origine.

Coordonnées de M dans le plan (x, x')		$x = x_2 = C_2 e^{-\lambda_2 t} \cos \Omega_2 t$
		$x' = x'_2 = -C_2 \omega_2 e^{-\lambda_2 t} \sin(\Omega_2 t - \psi_2)$
avec		$\lambda_2 = \varepsilon_2 \omega_2$ $\lambda_1 = \varepsilon_1 \omega_1$
		$\Omega_2 = \omega_2 \sqrt{1 - \varepsilon_2^2}$ $\Omega_1 = \omega_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}$
		$\psi_2 = \text{Arc tg} -\frac{\lambda_2}{\Omega_2}$ $\psi_1 = \text{Arc tg} -\frac{\lambda_1}{\Omega_1}$

b) $-a \leq x \leq +a$

L'équation (B) devient : $mx'' + bx' + K_1 x = 0$

Le mouvement est un mouvement amorti qui se fait autour de l'origine

Coordonnées de M dans le plan (x, x')		$x = x_1 = C_1 e^{-\lambda_1 t} \cos \Omega_1 t$
		$x' = x'_1 = -C_1 \omega_1 e^{-\lambda_1 t} \sin(\Omega_1 t - \psi_1)$

La courbe décrite par M dans le plan des phases satisfait aux conditions de raccordement (continuité de x et x') au passage du point $x = a$

$$x_2 = a - d = C_{02} e^{-\lambda_2 t_{12}} \cos \Omega_2 t_{12} \quad (1)$$

$$x_1 = a = C_{11} e^{-\lambda_1 t_{11}} \cos \Omega_1 t_{11} \quad (2) \text{ avec } e = a - d = \frac{K_1}{K_2} a$$

$$x'_2(t_{12}) = x'_1(t_{11}) = d_1 \quad (3)$$

Au départ ($t=0$) on se donne C_2 (fig. 1)

$$x_2 = C_2 \quad x'_2 = + C_2 \omega_2 \sin \psi_2$$

L'équation (1) permet de calculer t_{12} ; ensuite ce temps t_{12} nous permet de calculer $x'_2(t_{12}) = d_1$

On a donc :

$$(3) \quad x'_1(t_{11}) = d_1 = -C_{11} \omega_1 e^{-\lambda_1 t_{11}} \sin(\Omega_1 t_{11} - \psi_1)$$

$$x_1(t_{11}) = a = C_{11} e^{-\lambda_1 t_{11}} \cos \Omega_1 t_{11}$$

d'où :

$$\frac{d_1}{a} = -\omega_1 \frac{\sin \Omega_1 t_{11} \cos \psi_1 - \cos \Omega_1 t_{11} \sin \psi_1}{\cos \Omega_1 t_{11}}$$

$$\frac{d_1}{a} = -\omega_1 \cos \psi_1 (\operatorname{tg} \Omega_1 t_{11} - \operatorname{tg} \psi_1)$$

$$\frac{d_1}{a} = -\omega_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \left[\operatorname{tg} \Omega_1 t_{11} + \frac{\lambda_1}{\Omega_1} \right]$$

d'où :

$$t_{11} = -\frac{1}{\Omega_1} \operatorname{arctg} \left[\frac{d_1}{a \omega_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}} + \frac{\lambda_1}{\Omega_1} \right]$$

REMARQUE :

t_{11} est différent de t_{12}

t_{11} est un temps fictif; son origine serait ($t=0$) sur la courbe fictive en pointillé (fig.2)

t_{11} n'étant pas un temps réel nous permet cependant de graduer la courbe décrite par M. Au passage de chaque point $x=a$ ou $x=-a$, on a un changement d'origine des temps.

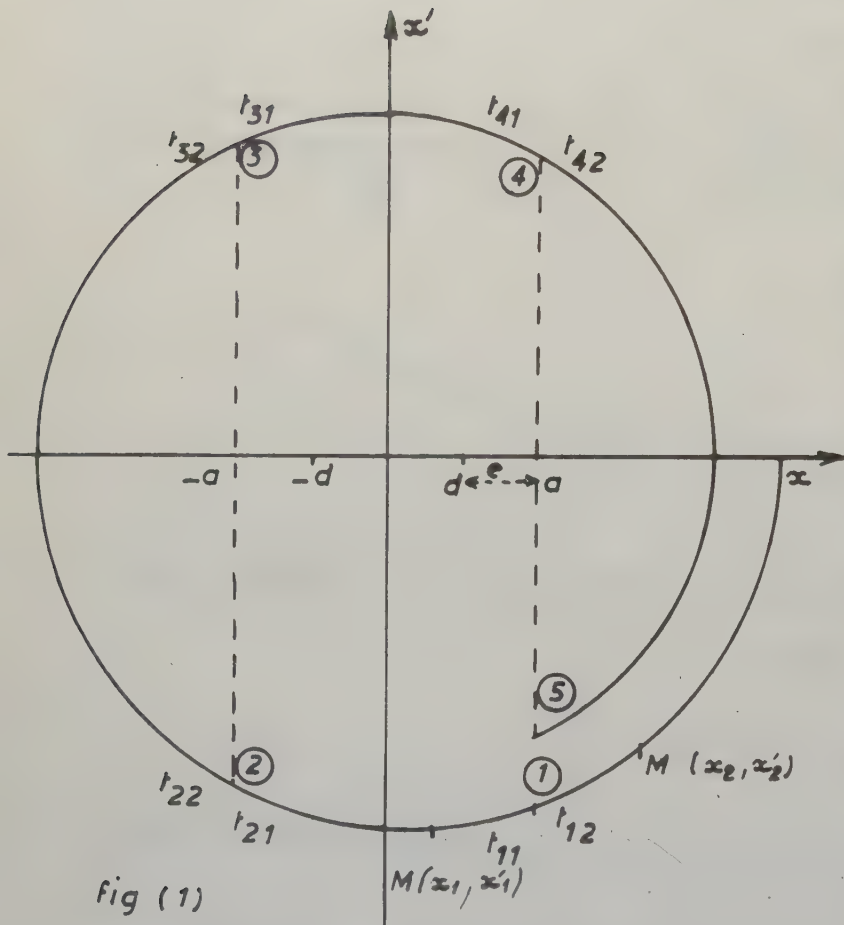
Exemple : Calcul du temps réel pour aller de M_0 à M.

$$t = t_{12} + (t_{21} - t_{11}) + (t_M - t_{22})$$

Détermination principale de t_{11} ; sachant que $0 < \Omega_1 t_{11} < \frac{\pi}{2}$, on peut écrire que

$$t_{11} = -\frac{1}{\Omega_1} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left[\frac{d_1}{a \omega_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}} + \frac{\lambda_1}{\Omega_1} \right]$$

Maintenant, ayant t_{11} , l'équation (2) permet de calculer C_{11} , ce qui nous donne la possibilité de tracer la courbe M (x, x') dans le plan des phases jusqu'au point (2).



Au point (2) on a des conditions de passage analogues aux conditions (C)

$$x_1 = a = C_{11} e^{-\lambda_1 t_{21}} \cos \Omega_1 t_{21} \quad (4)$$

$$x_2 = -a + d = C_{22} e^{-\lambda_2 t_{22}} \cos \Omega_2 t_{22} \quad (5)$$

$$x'_2(t_{22}) = x'_1(t_{21}) = d_2 \quad (6)$$

L'équation (4) permet de calculer t_{21} , qui avec (6), donne la valeur d_2

(5) et (6)

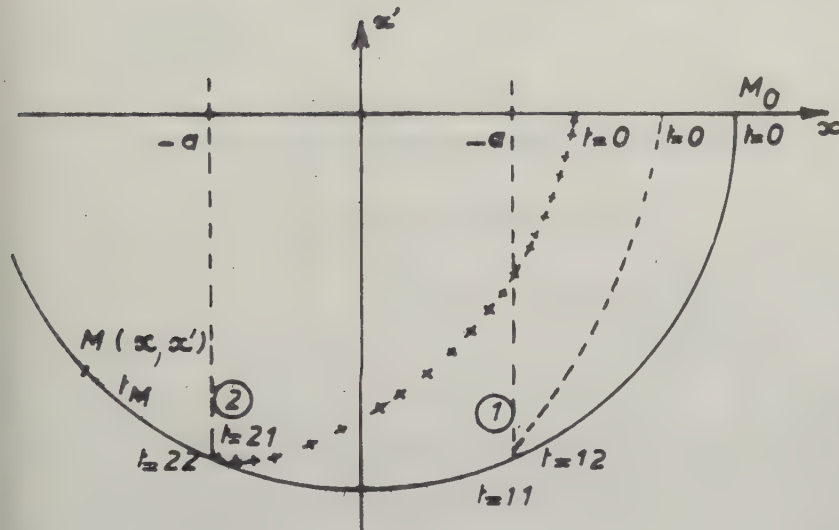


fig (2)

$$t_{22} = -\frac{1}{\Omega_2} \arctg \frac{d_2}{a \frac{K_1}{K_2} \omega_2 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}} + \frac{\lambda_2}{\Omega_2}$$

La détermination du petit arc tangente se fait comme précédemment en écrivant la condition $\pi/2 < \Omega_2 t_{22} < \pi$. Maintenant que nous avons t_{22} , l'équation (5) permet de calculer C_{22} , ce qui nous donne alors la possibilité de tracer la courbe $M(x, x')$ dans le plan des phases entre les points (2) et (3).

On peut donc, de proche en proche, tracer la courbe solution libre dans le plan des phases.

2°) Calcul de la fréquence en période des impulsions ou chocs

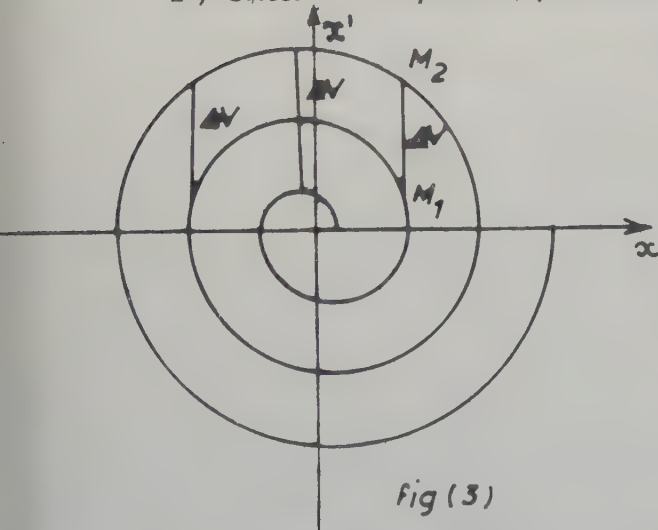


fig (3)

La courbe $M(x, x')$ étant tracée dans le plan des phases, on peut, en connaissant la valeur de la discontinuité de la vitesse due à l'impulsion ou au choc, calculer la valeur de la période de l'impulsion ou du choc, pour avoir un mouvement stable (fig.3)

$$T = t_{M_1} - t_{M_2}$$

De même, il est facile de mesurer l'amplitude de la vitesse et du déplacement.

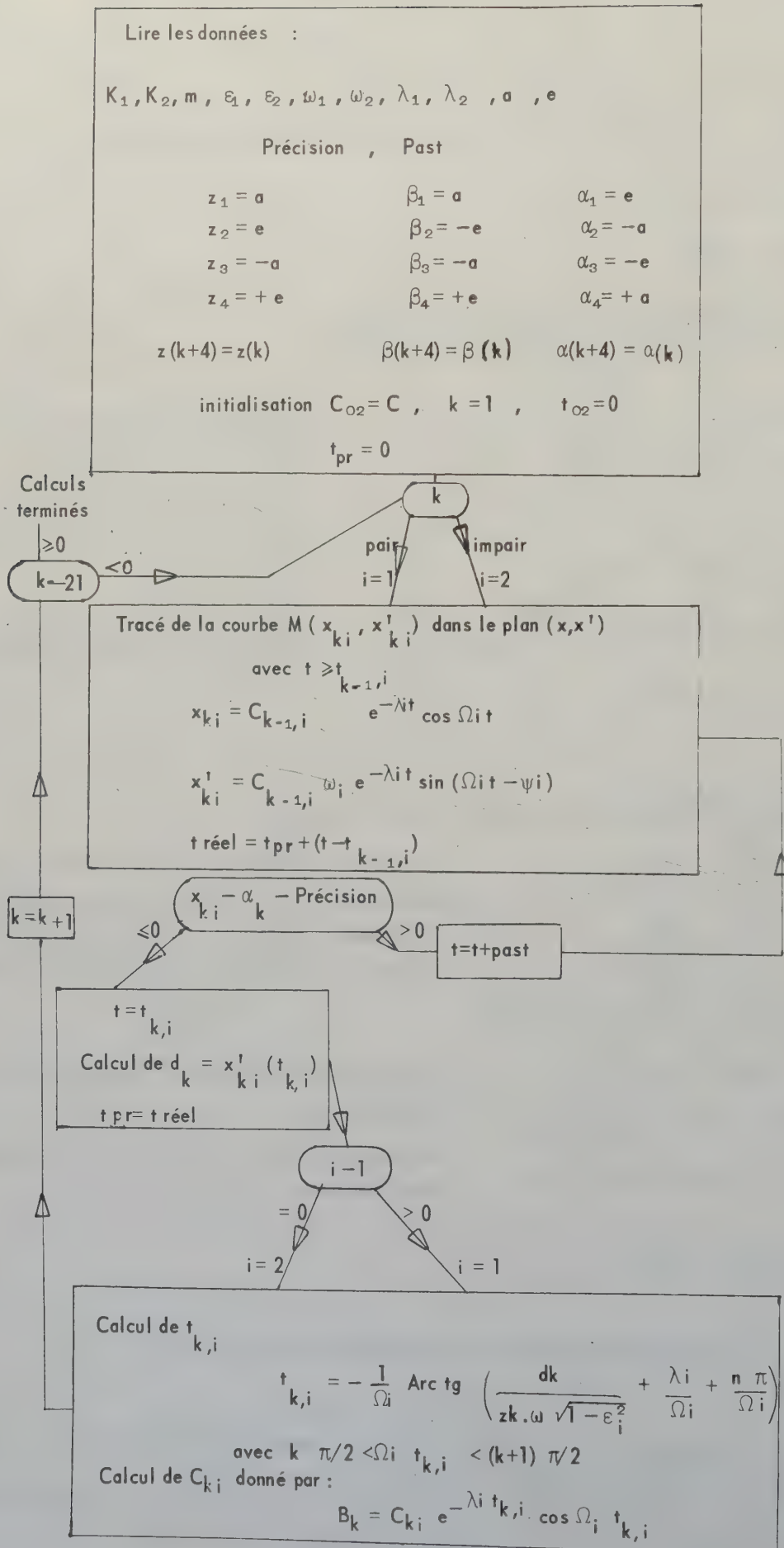
Ceci nous permet donc de tracer les courbes de réponse du système à des impulsions ou chocs périodiques.

3°) Organigramme du calcul

Les points de raccordement sont repérés par l'indice $k \in [1, 21]$

Le paramètre $i = 1, 2$ nous indique si nous sommes sur la courbe de raideur K_1 ou K_2

ORGANIGRAMME



4°) Tracé des courbes de réponse du système -

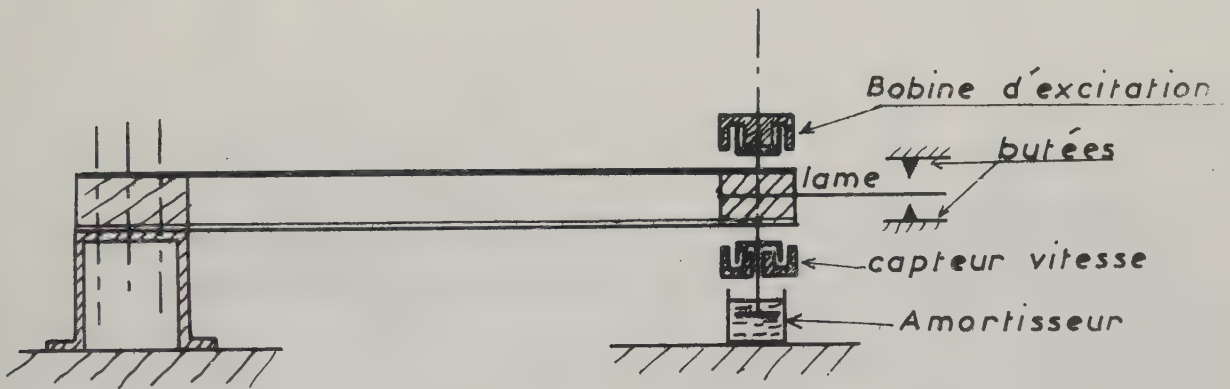
- a) Courbes théoriques : voir pages 50 - 51
- b) Courbes expérimentales : voir pages 52 - 53 - 54

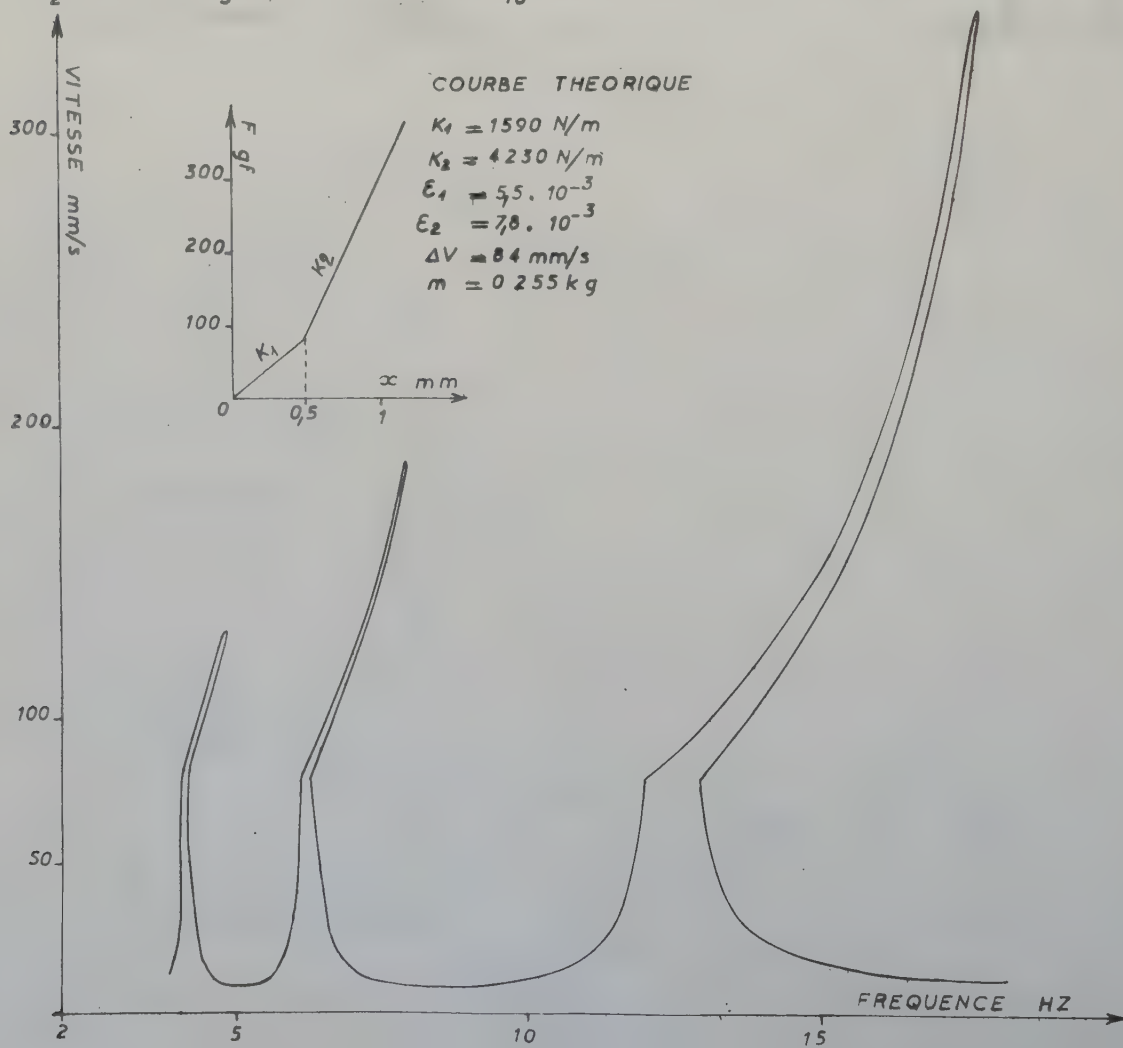
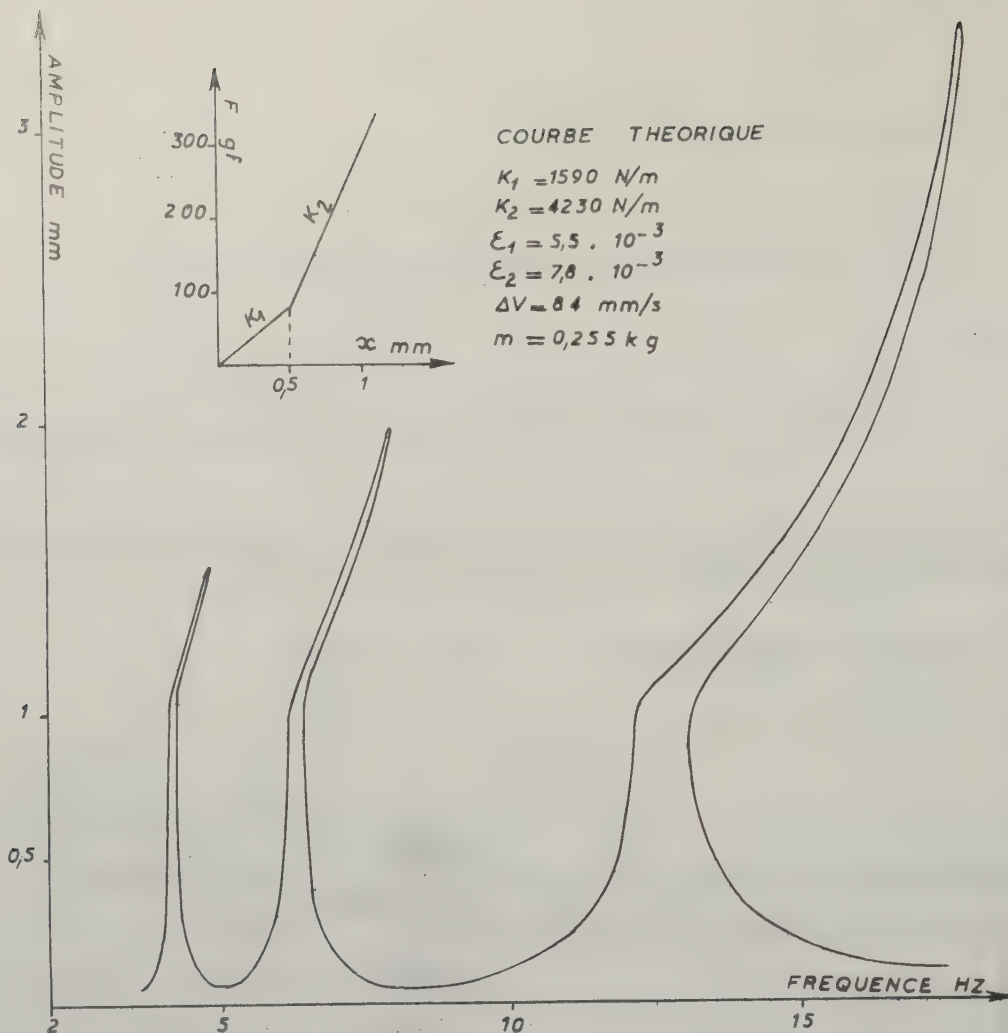
5°) Conclusion -

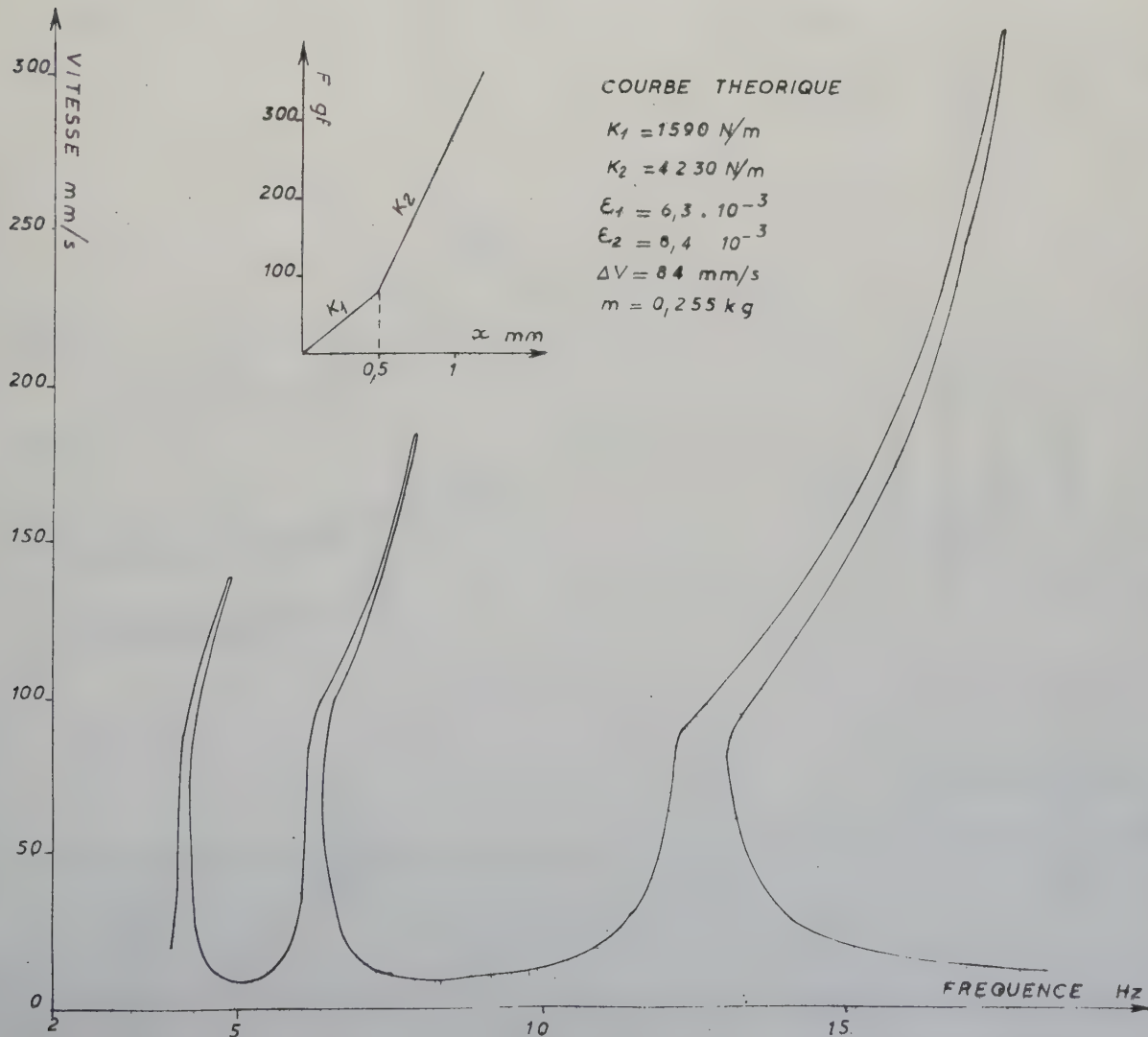
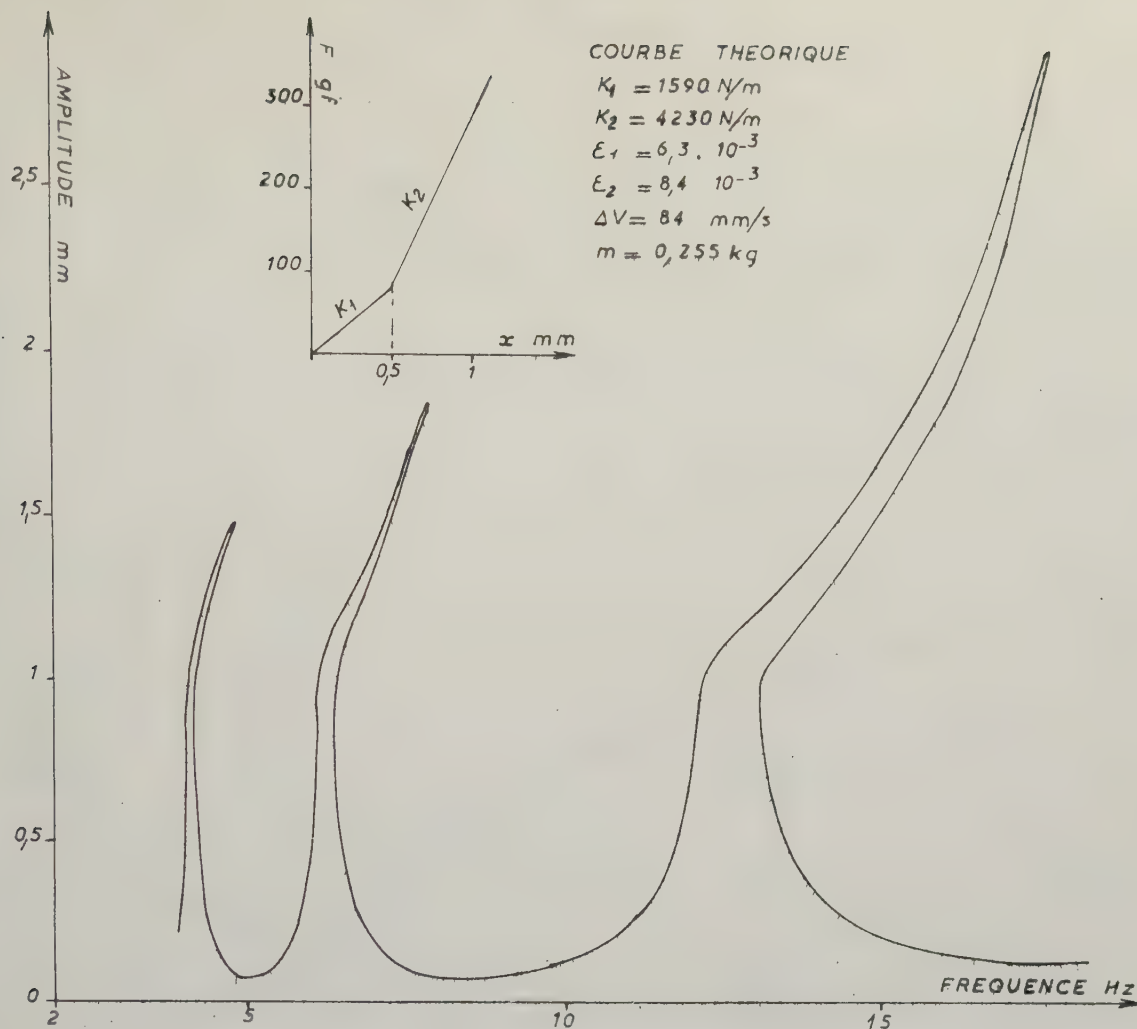
Tout d'abord on peut remarquer que l'allure des courbes théoriques et expérimentales est la même.

Les écarts entre les maxima des courbes théoriques et expérimentales peuvent s'expliquer par les erreurs de mesures sur ΔV , K_1 , K_2 , ε_1 , ε_2 et m et principalement sur ΔV , ε_1 , ε_2 .

Schéma du système étudié -







SYSTEME AVEC AMORTISSEMENT INTERNE

$$\xi_1 = 0,392 \cdot 10^{-2}$$

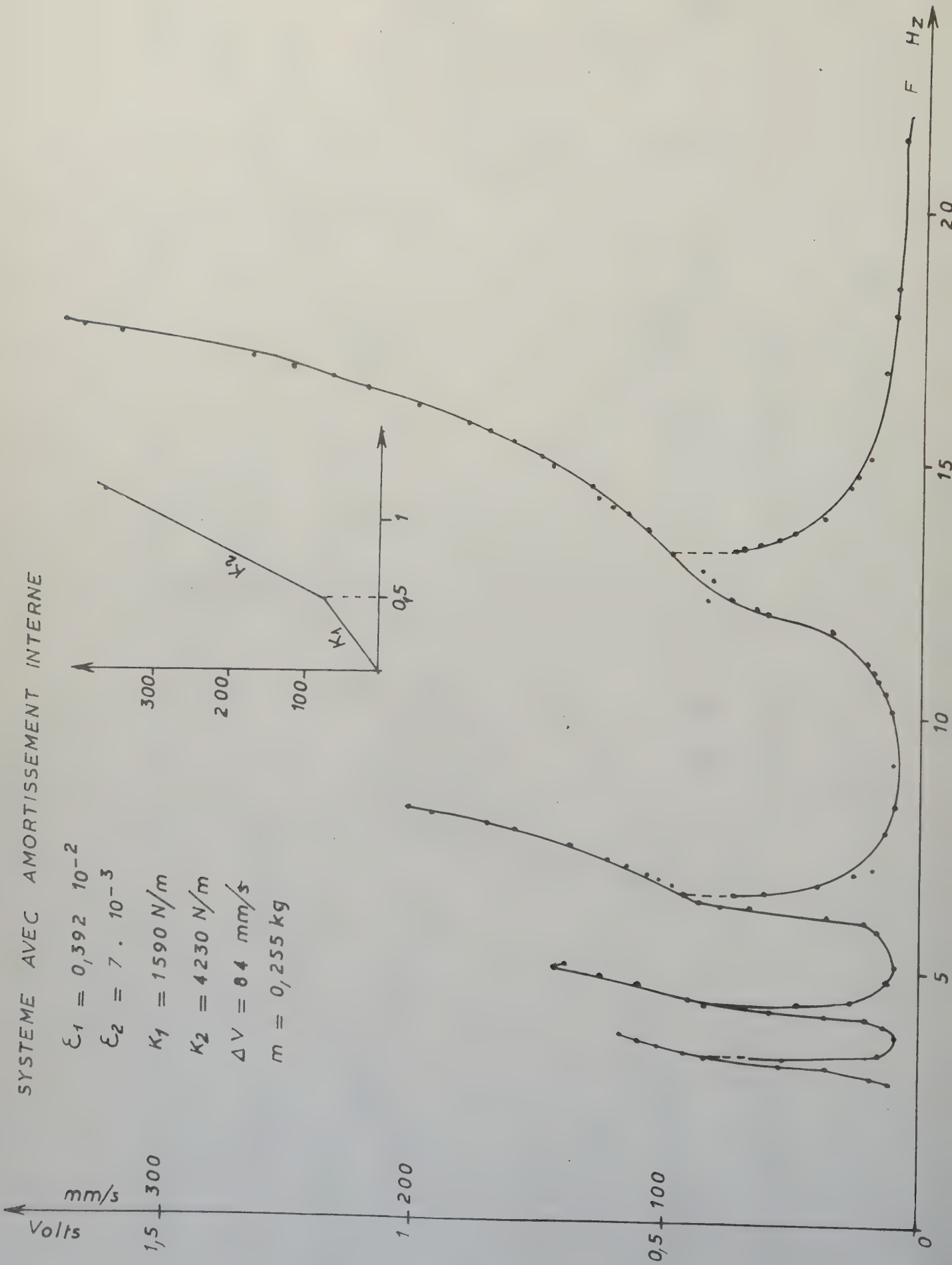
$$\xi_2 = 7 \cdot 10^{-3}$$

$$K_1 = 1590 \text{ N/m}$$

$$K_2 = 4230 \text{ N/m}$$

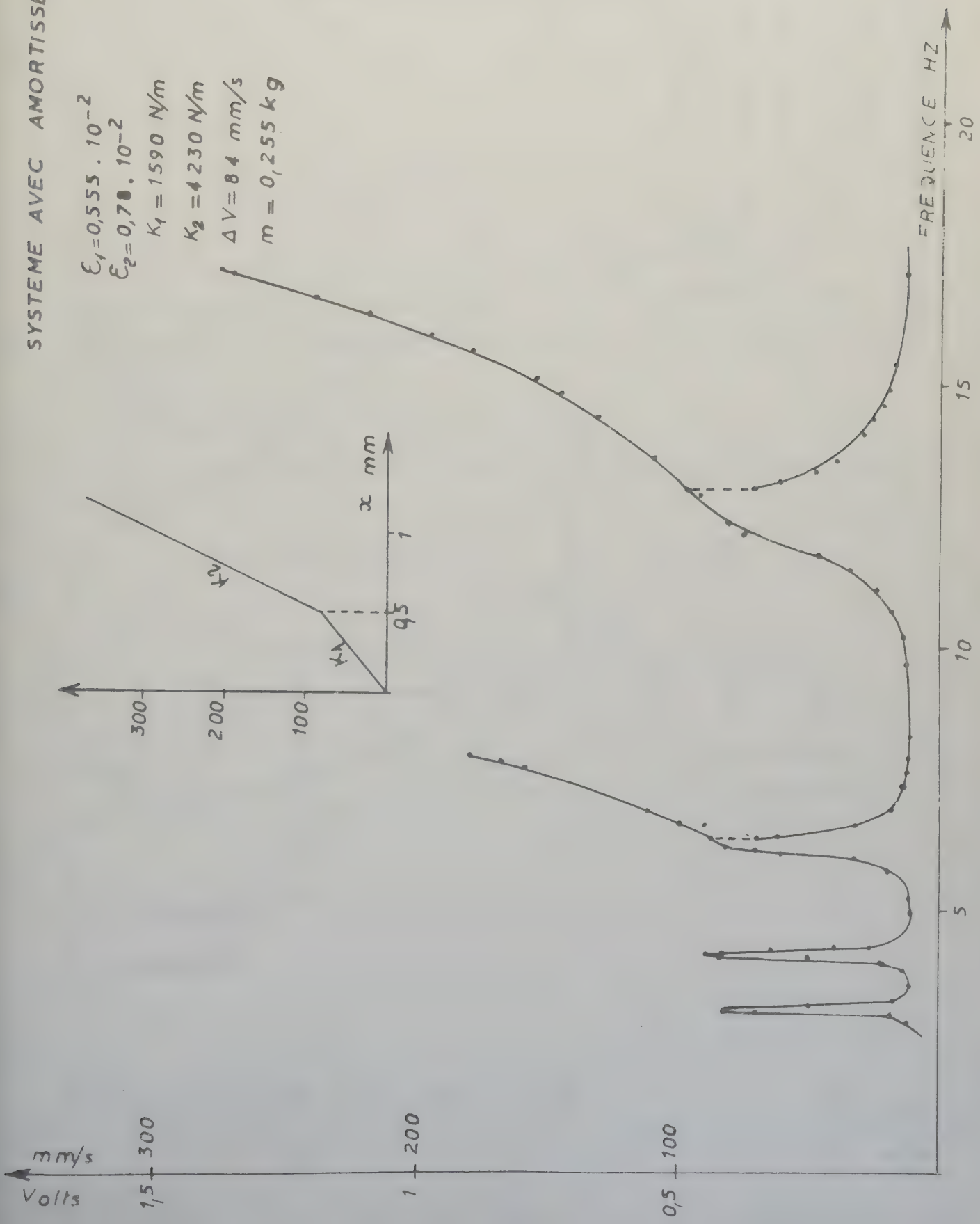
$$\Delta V = 84 \text{ mm/s}$$

$$m = 0,255 \text{ kg}$$



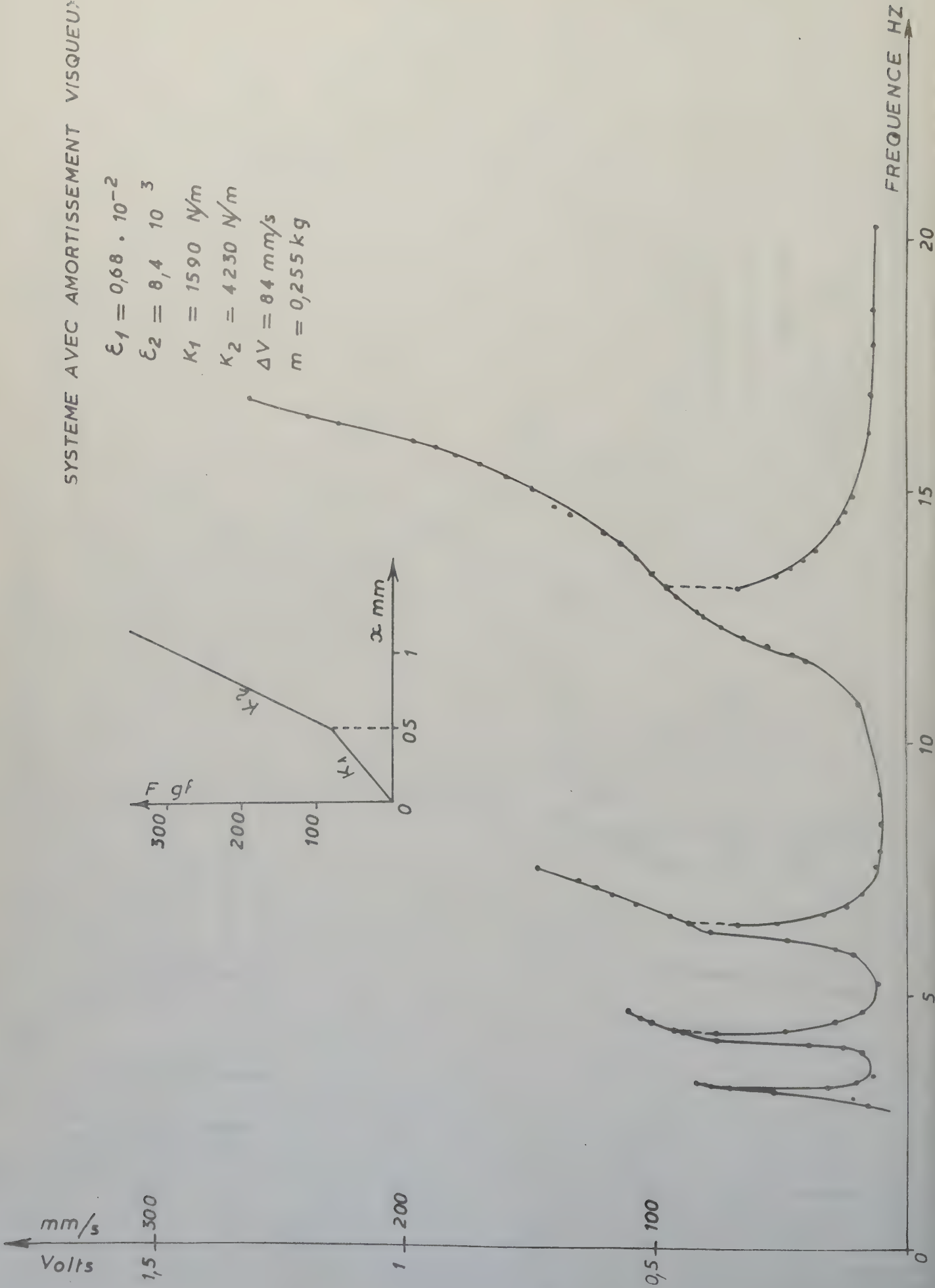
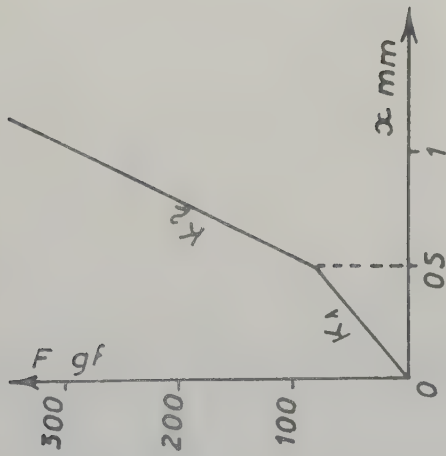
SYSTEME AVEC AMORTISSEMENT VISQUEUX

$\epsilon_1 = 0,555 \cdot 10^{-2}$
 $\epsilon_2 = 0,78 \cdot 10^{-2}$
 $K_1 = 1590 \text{ N/m}$
 $K_2 = 4230 \text{ N/m}$
 $\Delta V = 84 \text{ mm/s}$
 $m = 0,255 \text{ kg}$



SYSTEME AVEC AMORTISSEMENT VISQUEUX

$\xi_1 = 0,68 \cdot 10^{-2}$
 $\xi_2 = 8,4 \cdot 10^3$
 $K_1 = 1590 \text{ N/m}$
 $K_2 = 4230 \text{ N/m}$
 $\Delta V = 84 \text{ mm/s}$
 $m = 0,255 \text{ kg}$



Chapitre III

Système à un degré de liberté non linéaire et conservatif (caractéristique du type Duffing)

excité par impulsions ou chocs périodiques

1°) Généralités -

Le système à étudier a pour équation :

$$m x'' + \alpha x + \beta x^3 = I(t)$$

$I(t)$ = impulsion ou choc périodique

m = masse du système

$\alpha x + \beta x^3$ = caractéristique du ressort (type Duffing)

On sait qu'une impulsion ou un choc entraîne une discontinuité sur la vitesse, entre deux impulsions ou chocs, les oscillations sont des oscillations libres, ce qui nous amène à étudier la solution propre de l'équation :

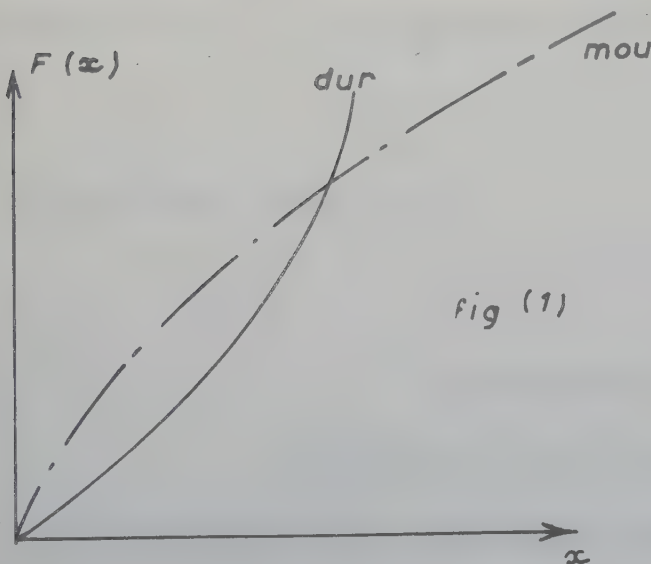
$$m x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad (1)$$

Le système étant conservatif, l'équation (1) est la dérivée de l'expression de la conservation de l'énergie $E_p + E_c = Cte$

avec les conditions initiales : $t = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} x = A \\ x' = 0 \end{array} \right.$

$$\text{d'où l'expression } \frac{1}{2} m x'^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{1}{4} \beta x^4 = \frac{1}{2} \alpha A^2 + \frac{1}{4} \beta A^4 \quad (2)$$

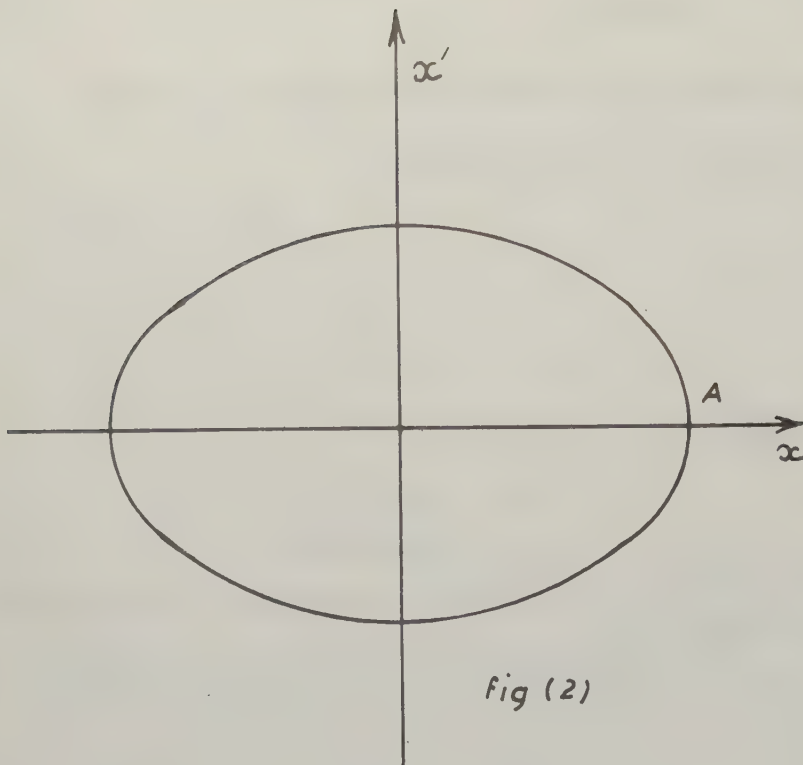
Nous allons tracer cette courbe dans le plan des phases



2 cas : $\alpha > 0 \quad \beta > 0$ ressort type dur
 $\alpha > 0 \quad \beta < 0$ ressort type mou

fig.1

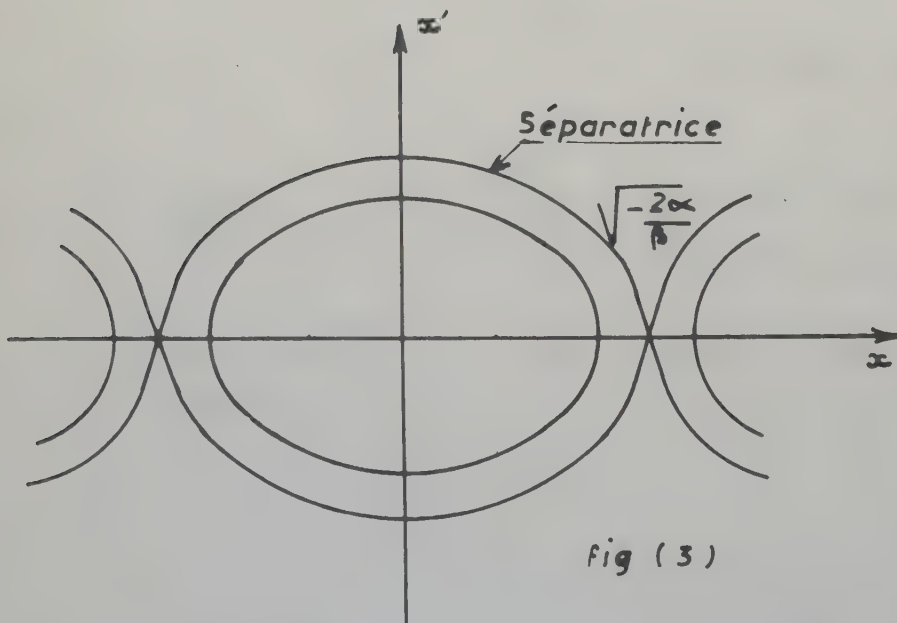
♦ $\alpha > 0$, $\beta > 0$



Dans ce cas, les courbes sont des courbes fermées autour de l'origine (figure 2) symétriques par rapport aux deux axes.

Fig (2)

♦ $\alpha > 0$, $\beta < 0$



Dans le plan (x', x) on n'a des

courbes fermées que si $A < \sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}$

On n'étudiera le système que pour $\beta > 0$, pour $\beta < 0$ le résultat serait analogue mais l'amplitude de A est limitée,

si $A > \sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}$ on a une instabilité

Fig (3)

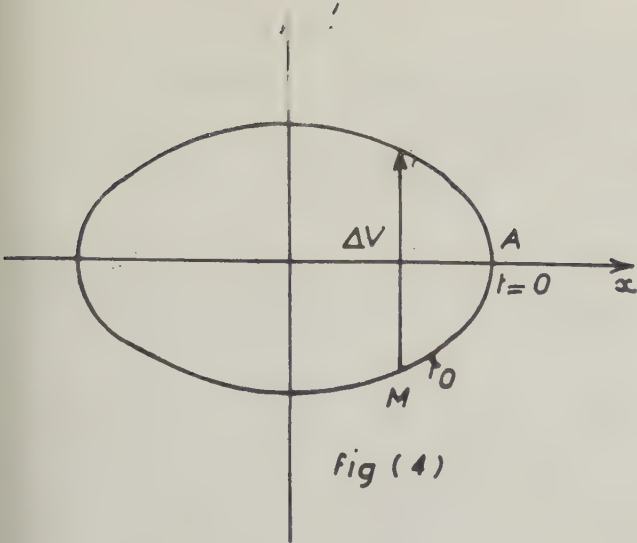
2°) Etude du système excité par impulsions ou chocs périodiques -

Entre chaque impulsion, les oscillations sont des oscillations libres.

Lorsque le régime permanent est établi, le plan des phases a la configuration donnée par la

figure 4

pour $x = x_0$ on a $v = \frac{\Delta V}{2}$



l'expression (2) devient :

$$\frac{1}{2} \beta x_0^4 + \alpha x_0^2 + m \frac{(\Delta V)^2}{4} - A^2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta A^2 \right) = 0$$

$$\text{d'où } x_0^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta A^2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta A^2 \right) - \beta m \frac{(\Delta V)^2}{2}}}{\beta}$$

$$\text{soit } x_0^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{(\alpha + \beta A^2)^2 - \beta m \frac{(\Delta V)^2}{2}}}{\beta}$$

On peut, à partir de ΔV en x donnant A, avoir la valeur de x_0

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{avec} \quad v^2 = \frac{1}{m} (A^2 - x^2) \left[\alpha + \frac{1}{2} \beta (A^2 + x^2) \right]$$

$$\text{d'où } dt = \frac{dx}{v}, \text{ en posant } x = A \cos \varphi \text{ (avec } x_0 = A \cos \varphi_0) \text{ on a } dt = \frac{\sqrt{m} d\varphi}{\sqrt{\alpha + \frac{1}{2} \beta A^2 (1 + \cos^2 \varphi)}}$$

$$\varphi_0 = \text{Arc cos } \frac{x_0}{A} \text{ d'où la valeur de } \varphi_0$$

Si au point A ($t = 0$), au point M on aura le temps t_0 (figure 4)

$$t_0 = \int_0^{\varphi_0} \frac{\sqrt{m} d\varphi}{\sqrt{\alpha + \frac{1}{2} \beta A^2 (1 + \cos^2 \varphi)}}$$

a) Calcul de la période du système libre -

$$T_0 = 4 \times \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{m} d\varphi}{\sqrt{\alpha + \frac{1}{2} \beta A^2 (1 + \cos^2 \varphi)}}$$

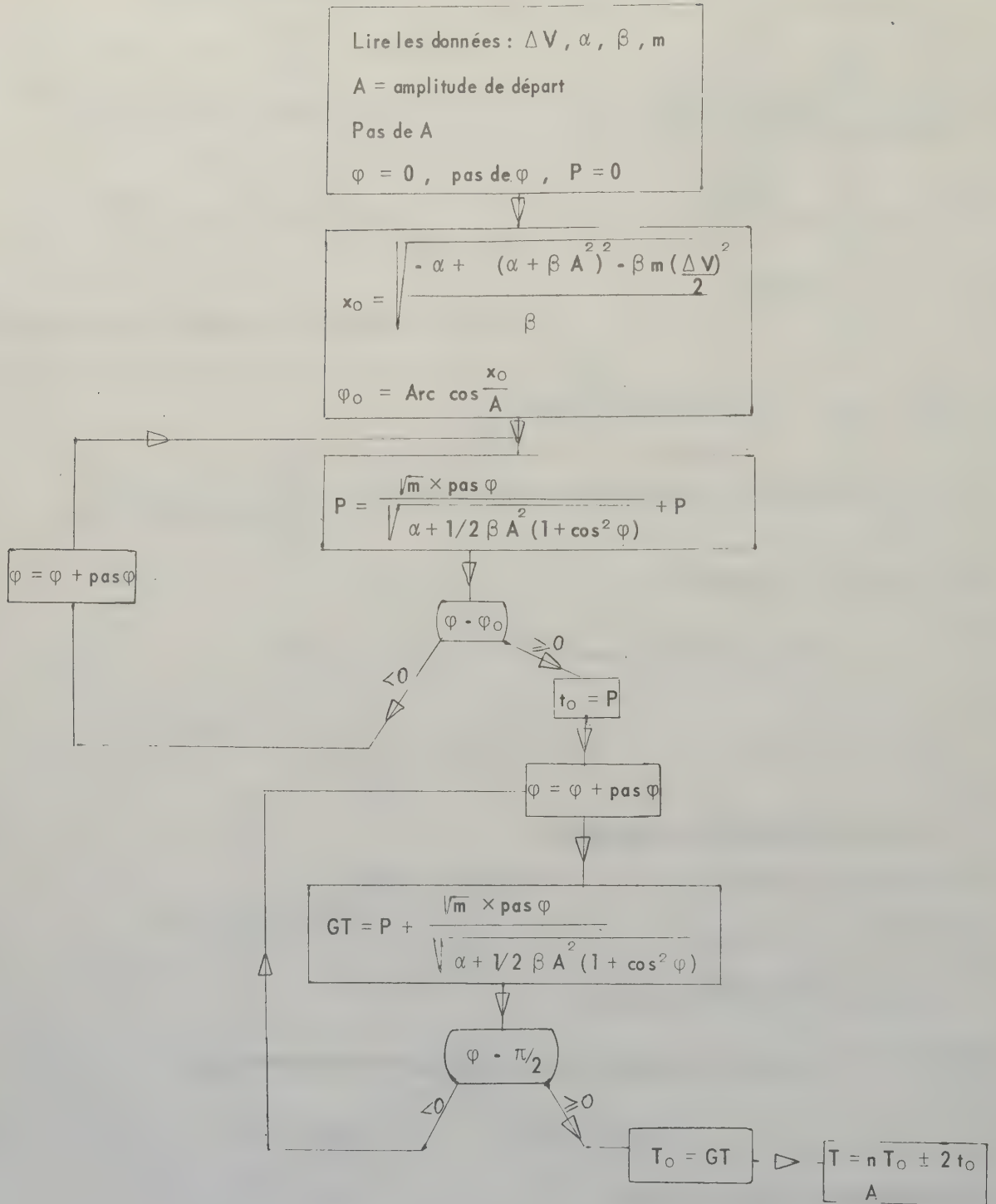
b) Calcul de la période des impulsions -

On a pour période possible des impulsions pour une amplitude A donnée

$$T = n T_0 \pm 2 t_0 \quad n = 1, 2, 3, \dots, n$$

3°) Organigramme (voir page suivante) -

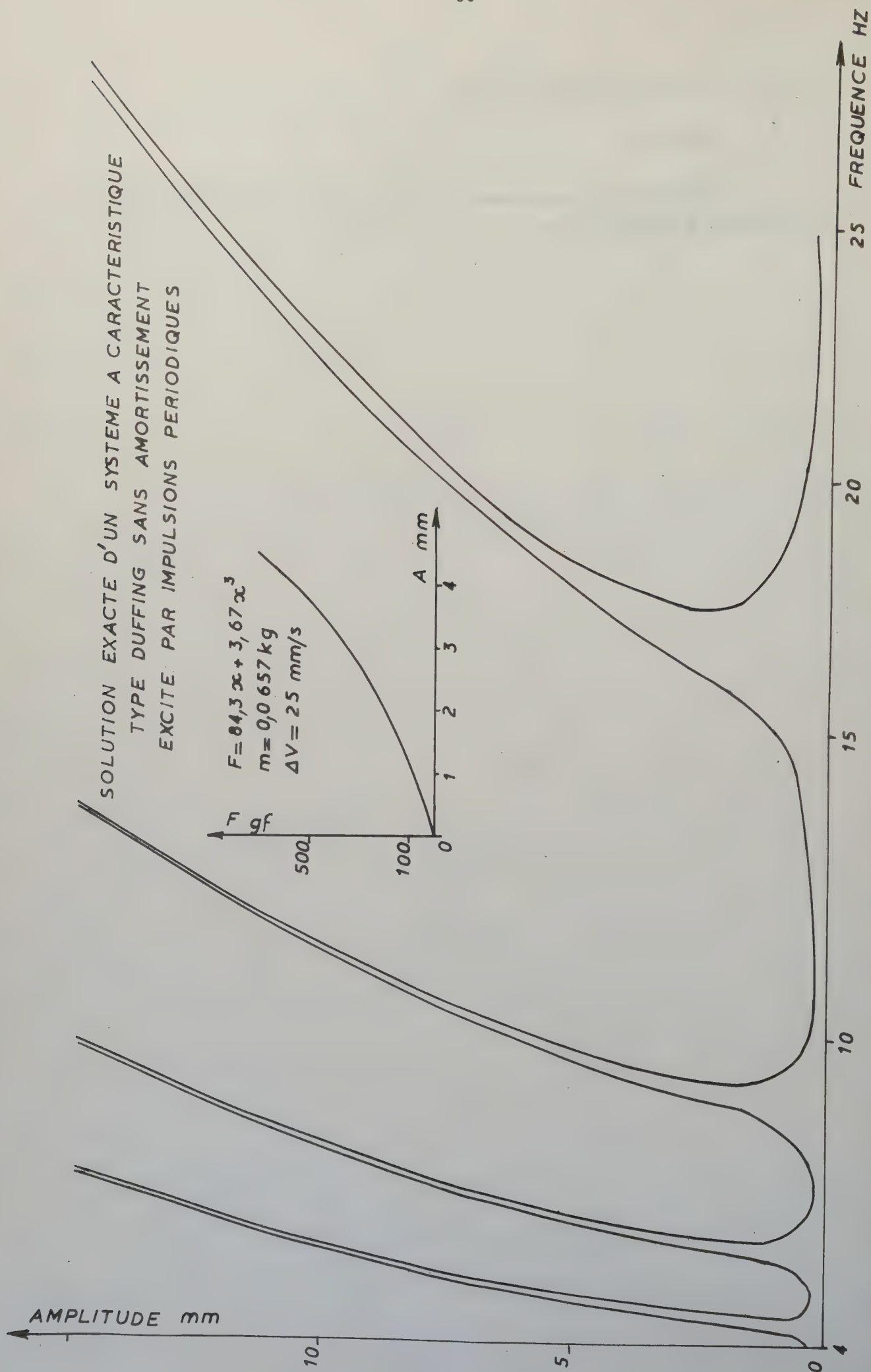
ORGANIGRAMME



*) Courbe de réponse du système (voir page 60)

Remarque -

Par cette méthode, on peut obtenir la valeur exacte de l'amplitude en fonction de la période ou de la fréquence des impulsions, même si la non linéarité est grande.



Chapitre IV

Système à un degré de liberté non linéaire et non conservatif (caractéristique du type Duffing) excité par impulsions ou chocs périodiques

1°) Généralités -

Le système à étudier a pour équation

$$m x'' + B x' + S x + \gamma x^3 = I_1(t) \quad (1)$$

en divisant par m , on a l'équation simplifiée

$$x'' + b x' + \alpha x + \beta x^3 = I(t) \quad (2)$$

En plus des termes définis au chapitre III, on a un terme d'amortissement $b x'$.

Comme précédemment, on va commencer par étudier l'équation du système libre :

$$x'' + b x' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad (3)$$

Nous allons l'étudier par deux méthodes approchées :

- la méthode de Kryloff et Bogoliuloff qui donne des résultats satisfaisants lorsque la non linéarité est faible.
- la méthode qui consiste à linéariser par morceaux la caractéristique. Cette méthode généralise la méthode du chapitre II où l'on avait deux pentes.

2°) Etude de la solution libre par la méthode approchée de Kryloff et Bogoliuloff -

a) Expression de la solution -

Pour un système linéaire, la solution serait $x = A \sin \theta$.

Par analogie, posons $x = A(t) \sin \theta$ A dépendant du temps

et comme la non linéarité est faible, $x' = v A(t) \cos \theta$ $\theta = v t + \varphi(t)$ avec $v = \sqrt{\alpha}$

$$\frac{dx}{dt} = x' = \frac{dA}{dt} \sin \theta + \left(v + \frac{d\varphi}{dt} \right) A \cos \theta \stackrel{\text{par hypothèse}}{=} v A \cos \theta$$

$$\text{d'où} \quad \frac{dA}{dt} \sin \theta + A \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta = 0 \quad (4)$$

$$x'' = v \frac{dA}{dt} \cos \theta - v A \left(v + \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin \theta$$

$$(3) \text{ devient } \frac{v}{dt} \frac{dA}{dt} \cos \theta - v A \left(v + \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin \theta + \alpha A \sin \theta + \beta A^3 \sin^3 \theta + bv A \cos \theta = 0$$

$$\text{d'où } \frac{dA}{dt} \cos \theta - A \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta = - \frac{\beta A^3}{v} \sin^3 \theta - b A \cos \theta \quad (5)$$

de (4) et (5) on tire

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = - \frac{\beta A^3}{v} \sin^3 \theta \cos \theta - b A \cos^2 \theta \\ \frac{d\varphi}{dt} = + \frac{\beta A^2}{v} \sin^4 \theta + b \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

Par hypothèse, on a supposé que A était une fonction variant peu avec le temps, de même pour φ .

On peut donc confondre la valeur moyenne et instantanée de $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\varphi}{dt} \simeq \frac{d\bar{\varphi}}{dt}, \text{ de même } \frac{dA}{dt} \simeq \frac{d\bar{A}}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(- \frac{\beta A^3}{v} \sin^3 \theta \cos \theta - b A \cos^2 \theta \right) d\theta$$

$$\text{d'où } \frac{d\bar{A}}{dt} = - \frac{bA}{2} = \frac{dA}{dt} \Rightarrow \boxed{A = A_0 e^{-b/2 t}}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta A^2}{v} \sin^4 \theta + b \cos \theta \sin \theta \right) d\theta$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \frac{3\beta A^2}{8\sqrt{\alpha}} = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 - \frac{3\beta A_0^2}{8\sqrt{\alpha}b} e^{-bt}}$$

d'où les valeurs de x et x' :

$$x = A_0 e^{-b/2 t} \sin \left[\sqrt{\alpha} t - \frac{3\beta A_0^2}{8\sqrt{\alpha}b} e^{-bt} + \varphi_0 \right]$$

$$x' = \sqrt{\alpha} A_0 e^{-b/2 t} \cos \left[\sqrt{\alpha} t - \frac{3\beta A_0^2}{8\sqrt{\alpha}b} e^{-bt} + \varphi_0 \right]$$

Pour déterminer φ_0 écrivons que $x(t=0) = A_0$

$$\text{soit } - \frac{3\beta A_0^2}{8\sqrt{\alpha}b} + \varphi_0 = 3\pi/2$$

$$\varphi_0 = 3\pi/2 + \frac{3\beta A_0^2}{8\sqrt{\alpha}b}$$

$$\begin{aligned} x &= A_0 e^{-b/2 t} \cos \left[\sqrt{\alpha} t + \frac{3 \beta A_0^2}{8 \sqrt{\alpha} b} (1 - e^{-bt}) \right] \\ x' &= -\sqrt{\alpha} A_0 e^{-b/2 t} \sin \left[\sqrt{\alpha} t + \frac{3 \beta A_0^2}{8 \sqrt{\alpha} b} (1 - e^{-bt}) \right] \end{aligned}$$

Nous pouvons donc tracer la courbe $M(x, x')$ dans le plan des phases et déterminer la position de l'impulsion, sa période et l'amplitude du déplacement et de la vitesse.

b) Courbes théoriques - (voir pages 66)

3°) Etude d'une solution approchée par la méthode de linéarisation par morceaux -

Cette méthode généralise la méthode du chapitre III.

a) Equation étudiée -

L'équation étudiée est comme précédemment celle sans second membre :

$$m x'' + B x' + F(x) = 0 \quad (6)$$

$F(x)$ étant une caractéristique multilinéaire construite sur la caractéristique type Duffing (voir figure 1). Si nous approchons la caractéristique (type Duffing) par 4 droites par exemple, l'équation (6) pour chaque segment de droite aura la forme $m x''_i + b x'_i + k_i x_i = d_i$ $i = 1, 2, 3, 4$.

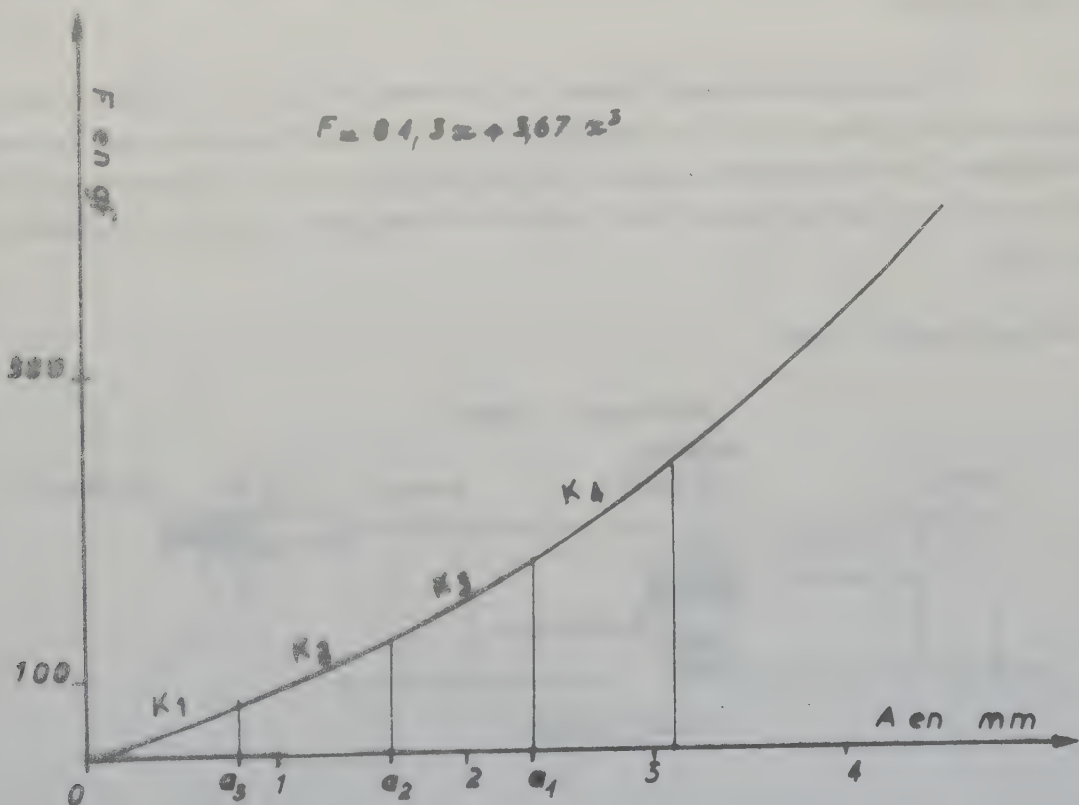


Figure 1

$$d_1 = \frac{K_4 \cdot K_3}{K_4} \varepsilon_1 a_1 \quad \varepsilon_1 = \pm 1$$

$$d_2 = \frac{K_3 \cdot K_2}{K_3} \varepsilon_2 a_2 \quad \varepsilon_2 = \pm 1$$

$$d_3 = \frac{K_2 \cdot K_1}{K_2} \varepsilon_3 a_3 \quad \varepsilon_3 = \pm 1$$

$$d_4 = 0$$

Nous sommes ramenés à étudier des équations linéaires classiques mais avec des conditions initiales pour chacune qui dépendent du point de raccordement et de la vitesse finale de l'équation précédente.

Nous avons étudié l'évolution des courbes de réponse du système en approchant la caractéristique type Duffing par 2,3,4,5,6 et 10 droites.

b) Courbes théoriques (voir pages 67 à 72)

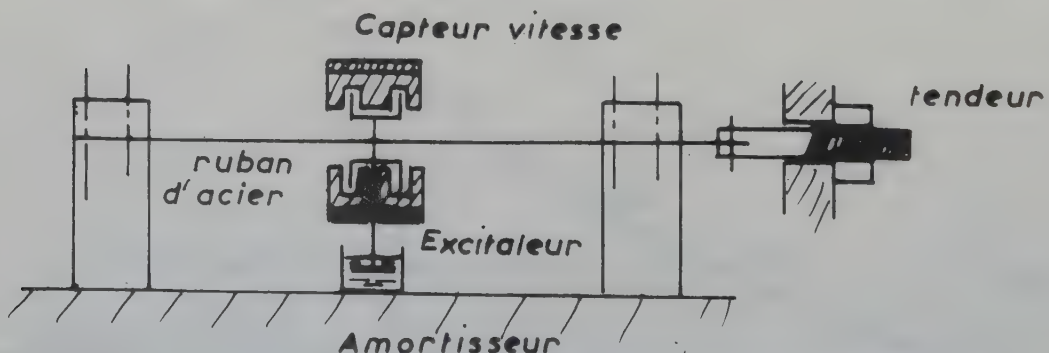
4) Conclusion et comparaison des résultats donnés par ces deux méthodes -

Le maximum de l'amplitude du déplacement est sensiblement constant lorsqu'on augmente le nombre de droites pour approcher la caractéristique type Duffing, la fréquence de ce maximum croît avec ce nombre de droites, elle semble cependant se stabiliser lorsqu'on l'a approchée par dix droites.

Le maximum de la vitesse croît avec le nombre de droites, ceci semble assez logique: la fréquence et la pulsation augmentant, l'amplitude du déplacement étant à peu près constante, la vitesse x' de la forme $x' = \omega x$ doit augmenter.

Si l'on compare maintenant ces courbes avec les courbes de la réponse du système données par la méthode de Kryloff et Bogoliuloff, on peut remarquer qu'elles sont évidemment même allure, mais les maxima sont très différents. Etant donné l'écart peu important entre la caractéristique réelle et la caractéristique multi-linéaire, on peut affirmer que la méthode de Kryloff et Bogoliuloff ne donne qu'une courbe très approchée de la solution réelle.

5°) Schéma du système étudié -



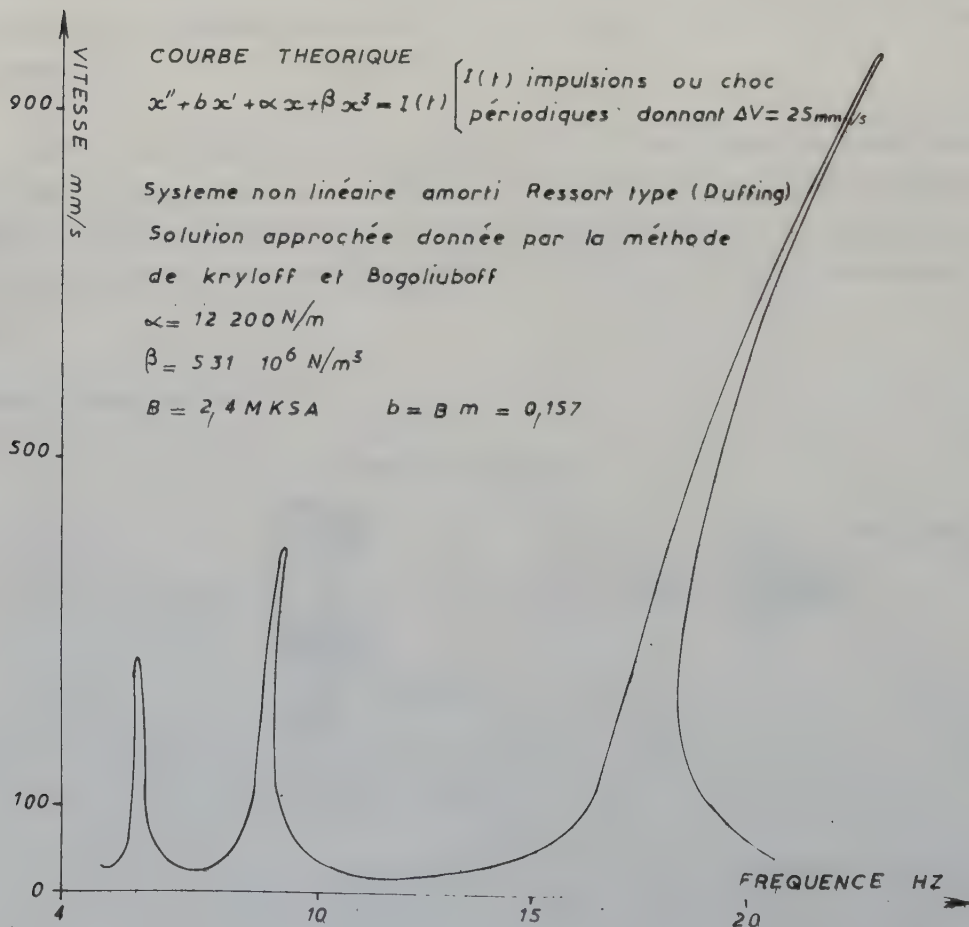
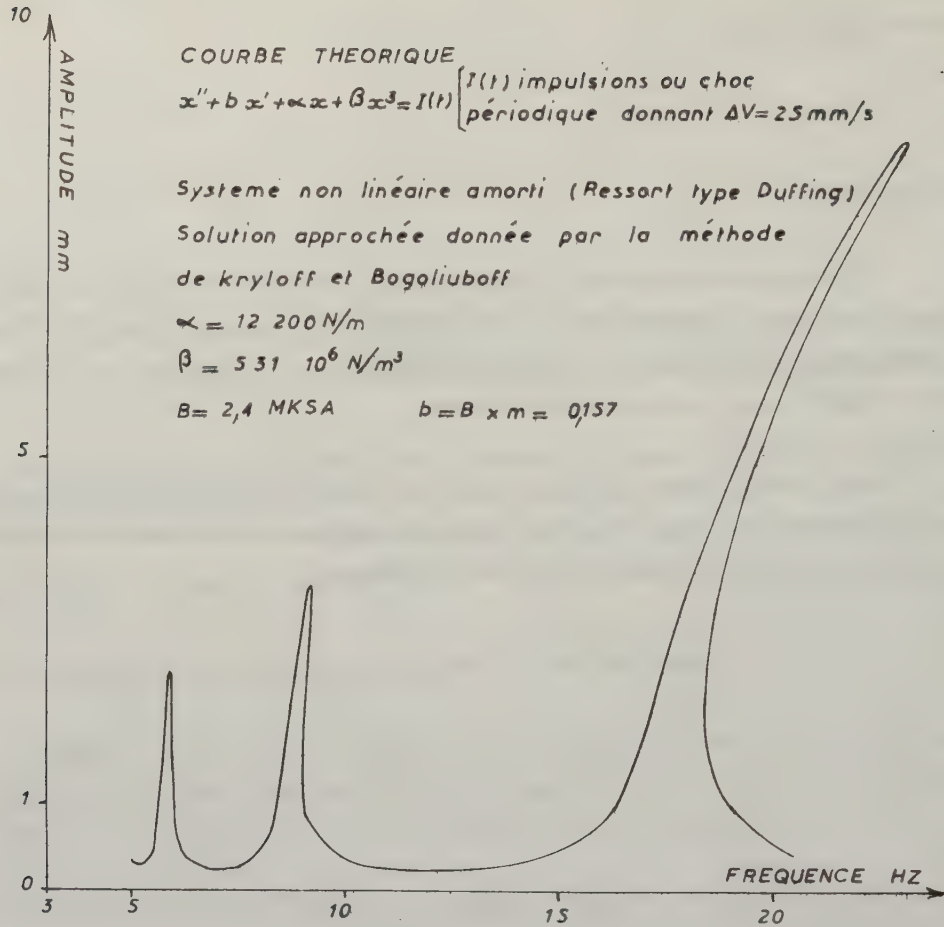
6°) Courbes expérimentales -

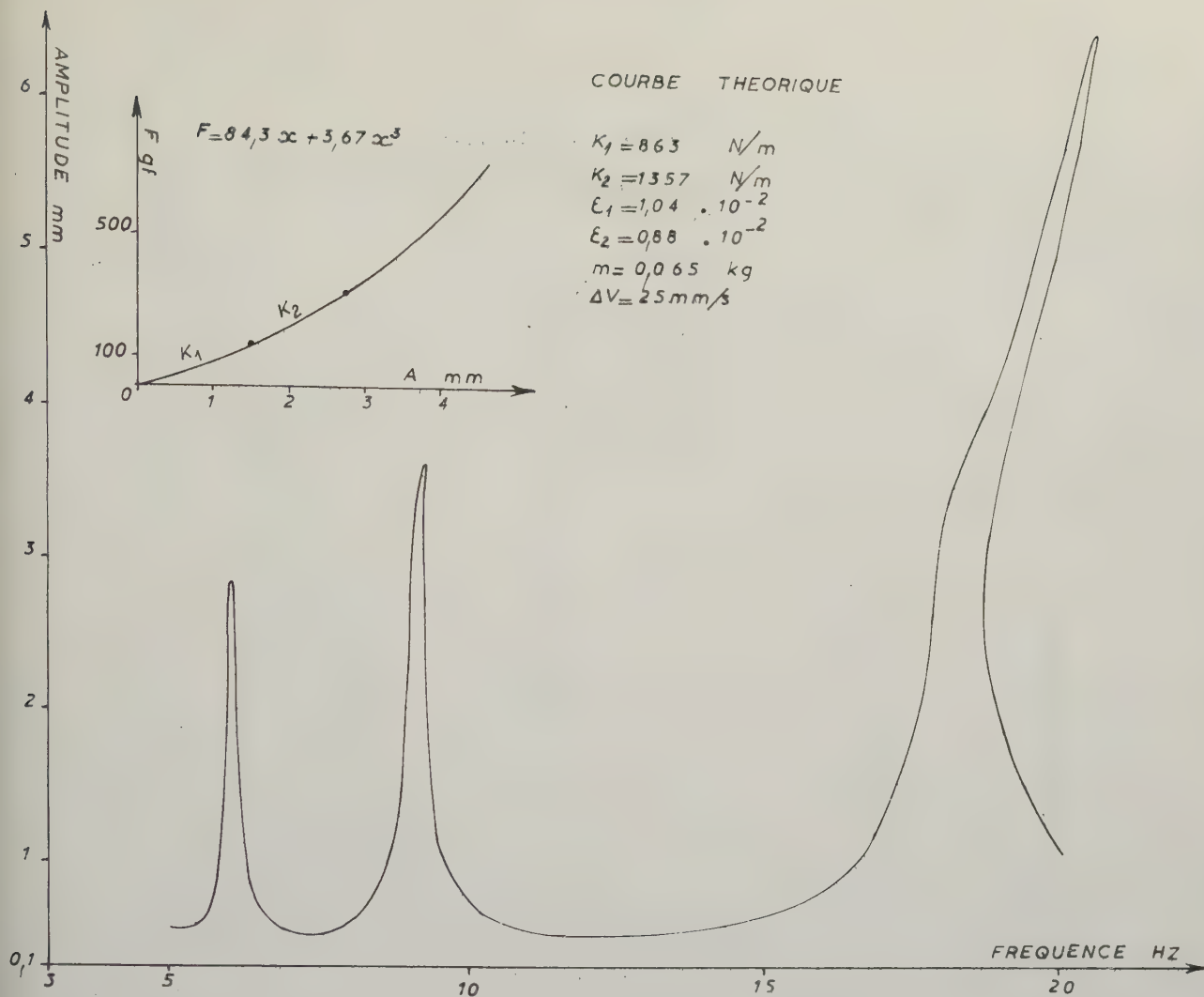
Voir pages 73 - 74 - 75.

7°) Conclusion générale -

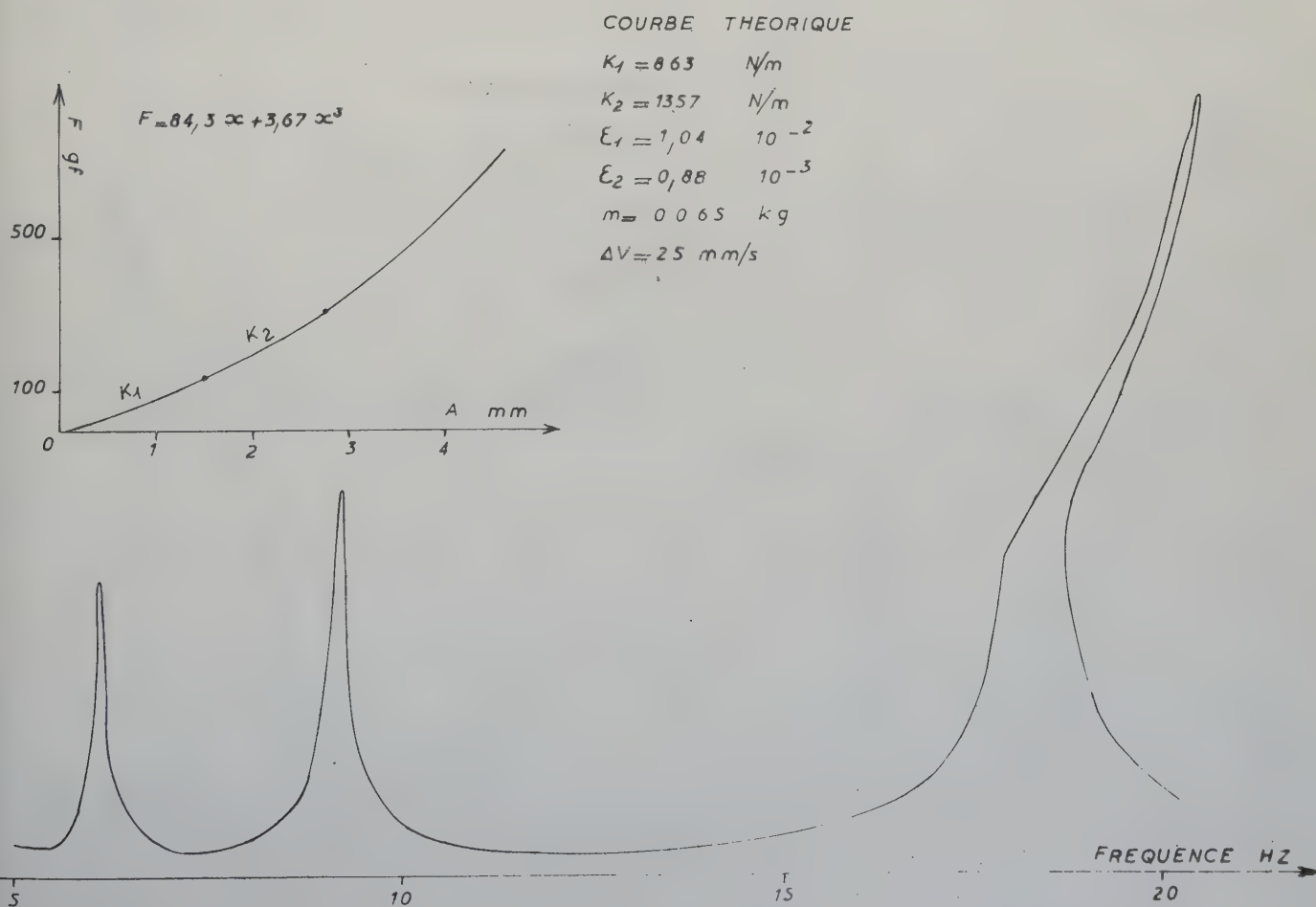
L'allure des courbes théoriques et expérimentales est la même mais il est très difficile de les comparer à cause des erreurs importantes dues à la mesure de ΔV et b , on pourrait, d'une façon très générale, étudier tous les systèmes non linéaires à un degré de liberté excités par impulsions ou chocs périodiques en approchant les caractéristiques par des tronçons de droites.

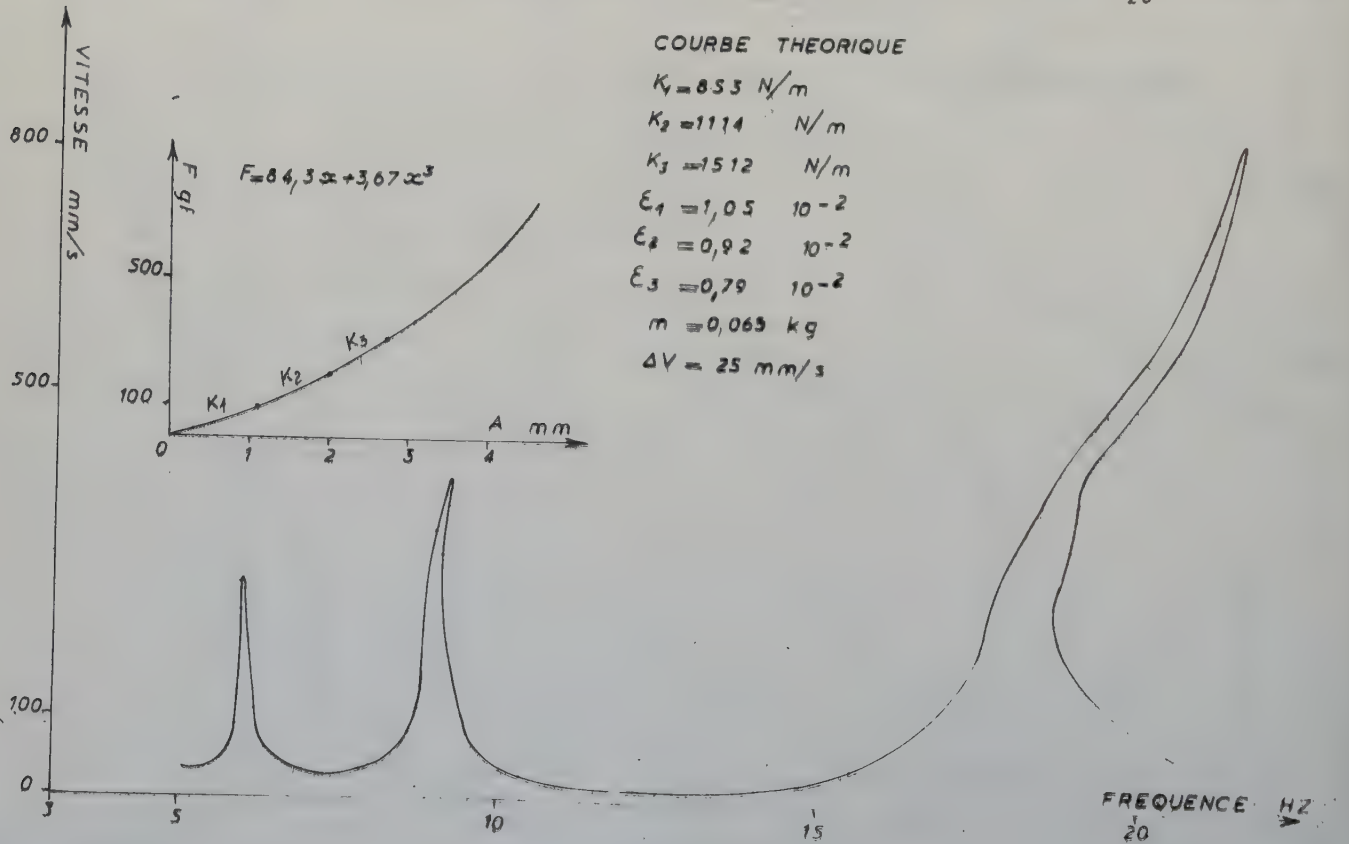
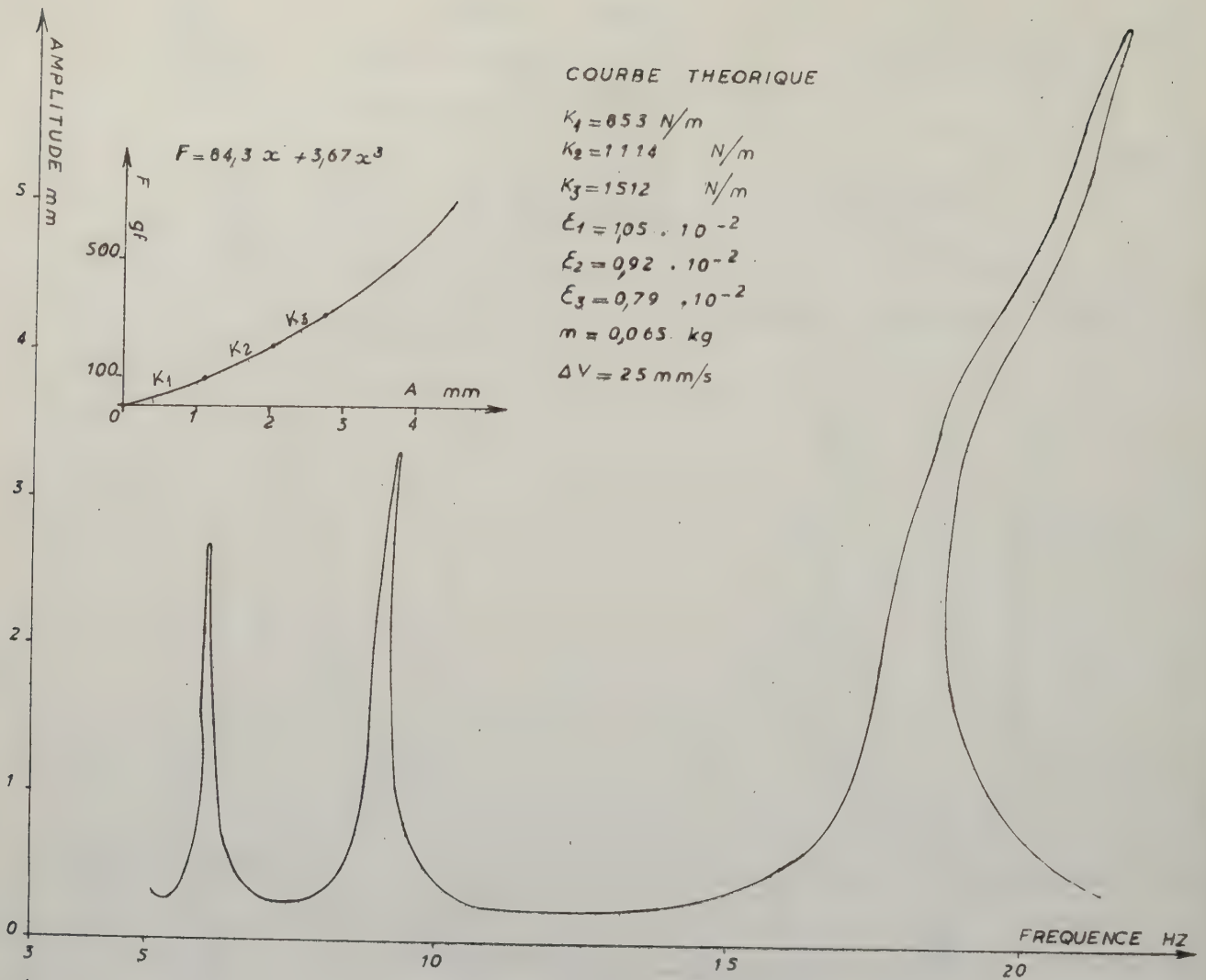
Dans le cas où l'amortissement ne serait pas linéaire, on pourrait même définir un amortissement moyen linéaire par tronçons considérés, ainsi, on pourrait englober toutes les sortes de non-linéarité dans l'étude de tels systèmes excités par impulsions ou chocs périodiques.

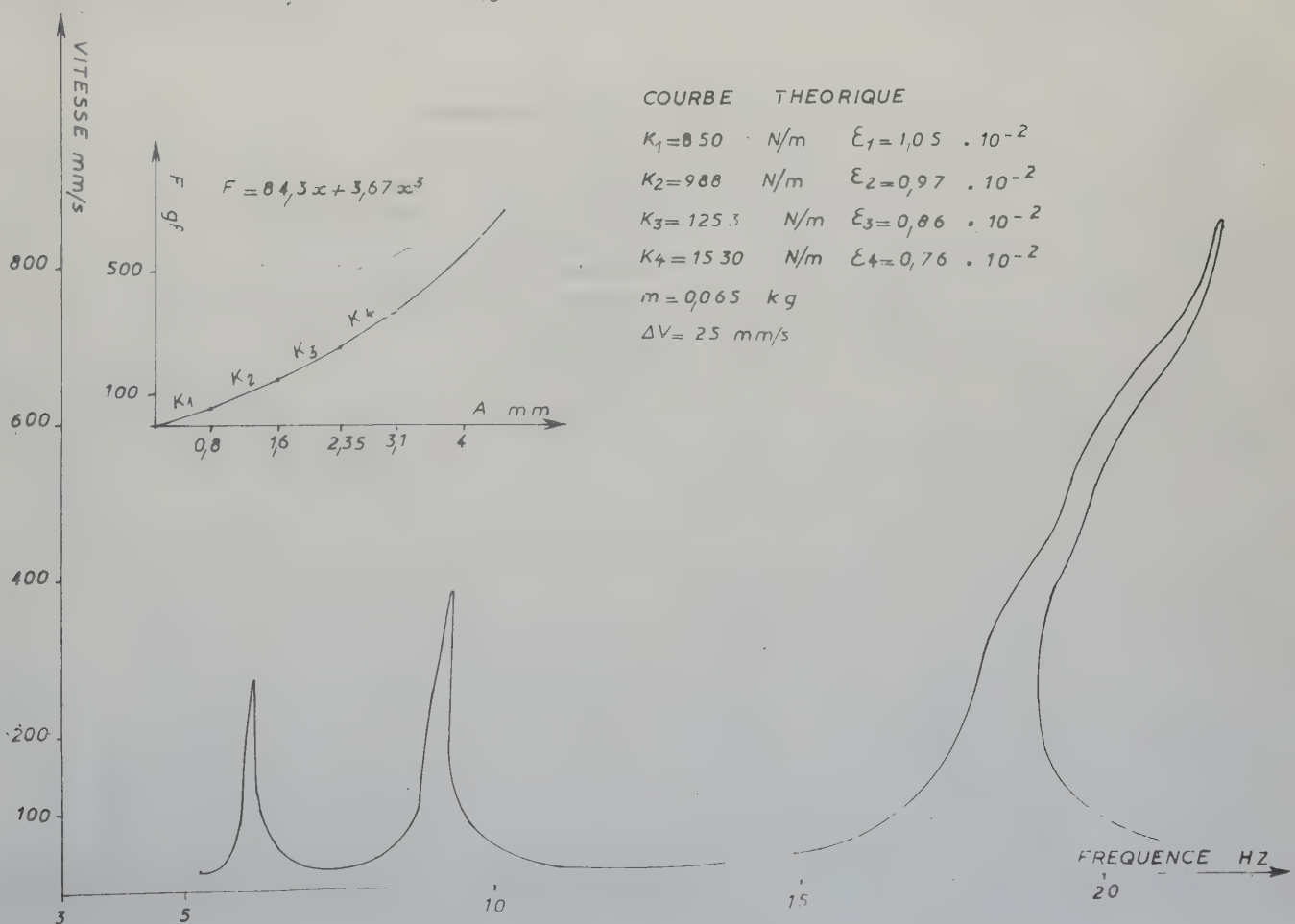
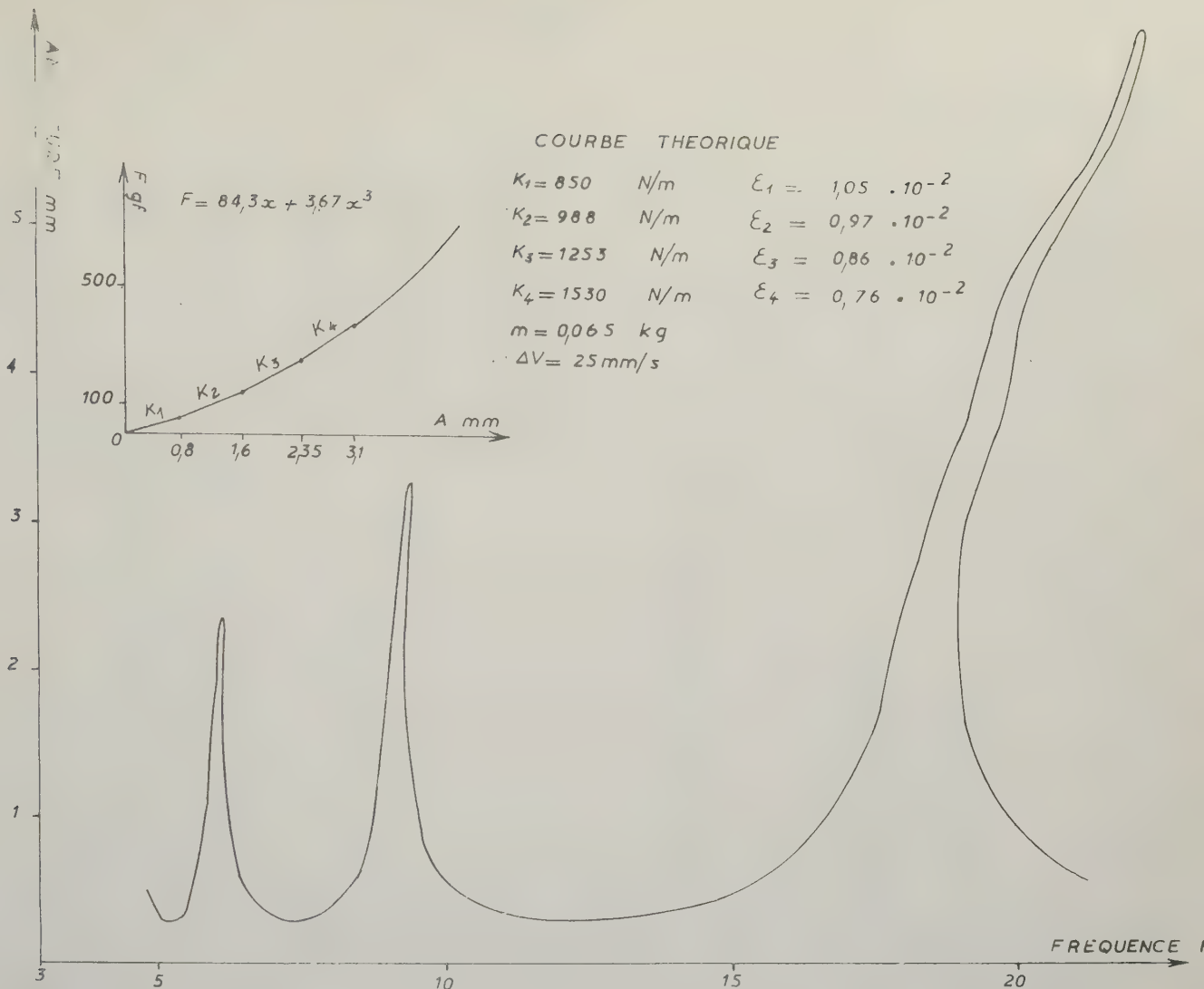


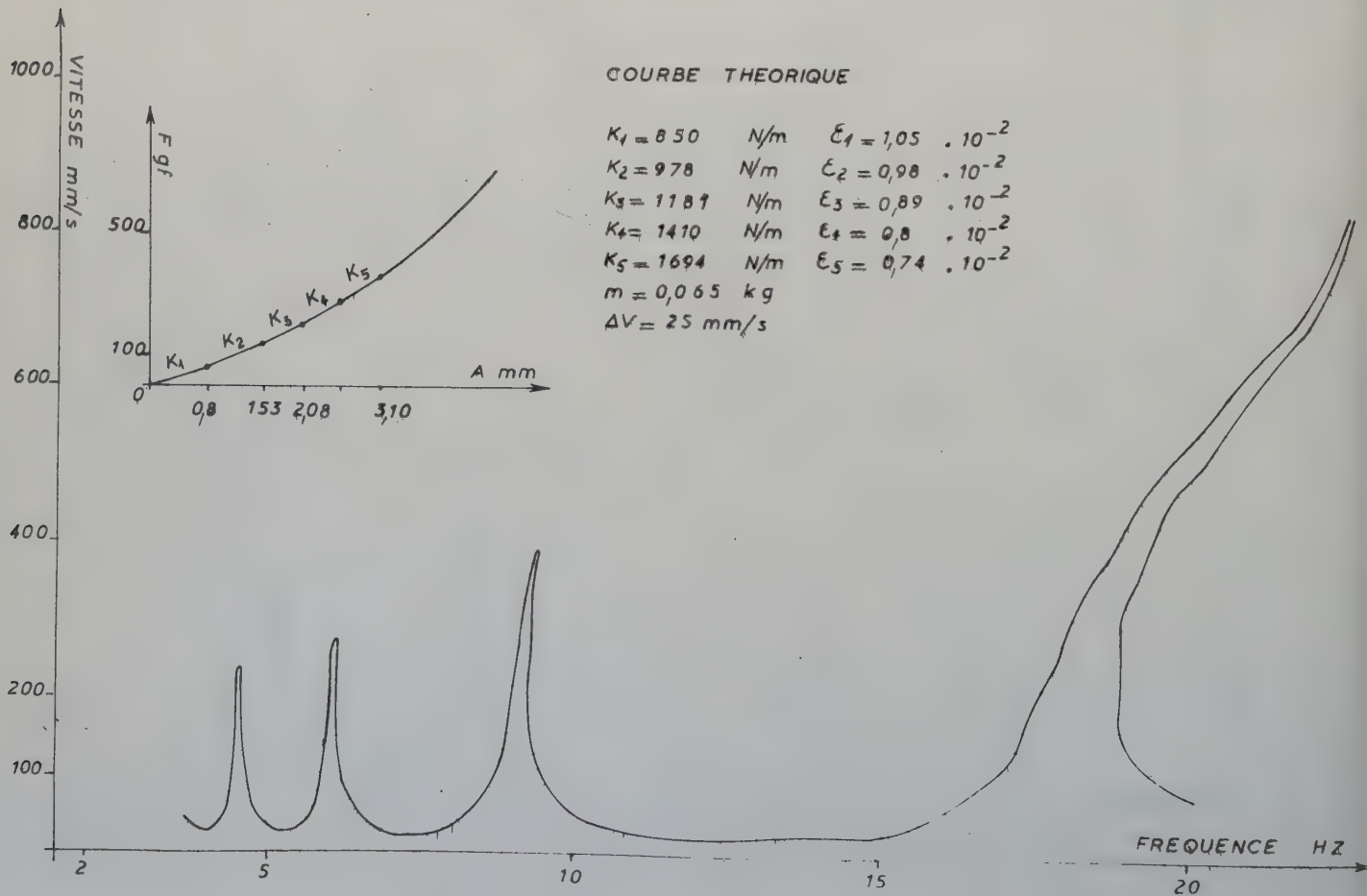
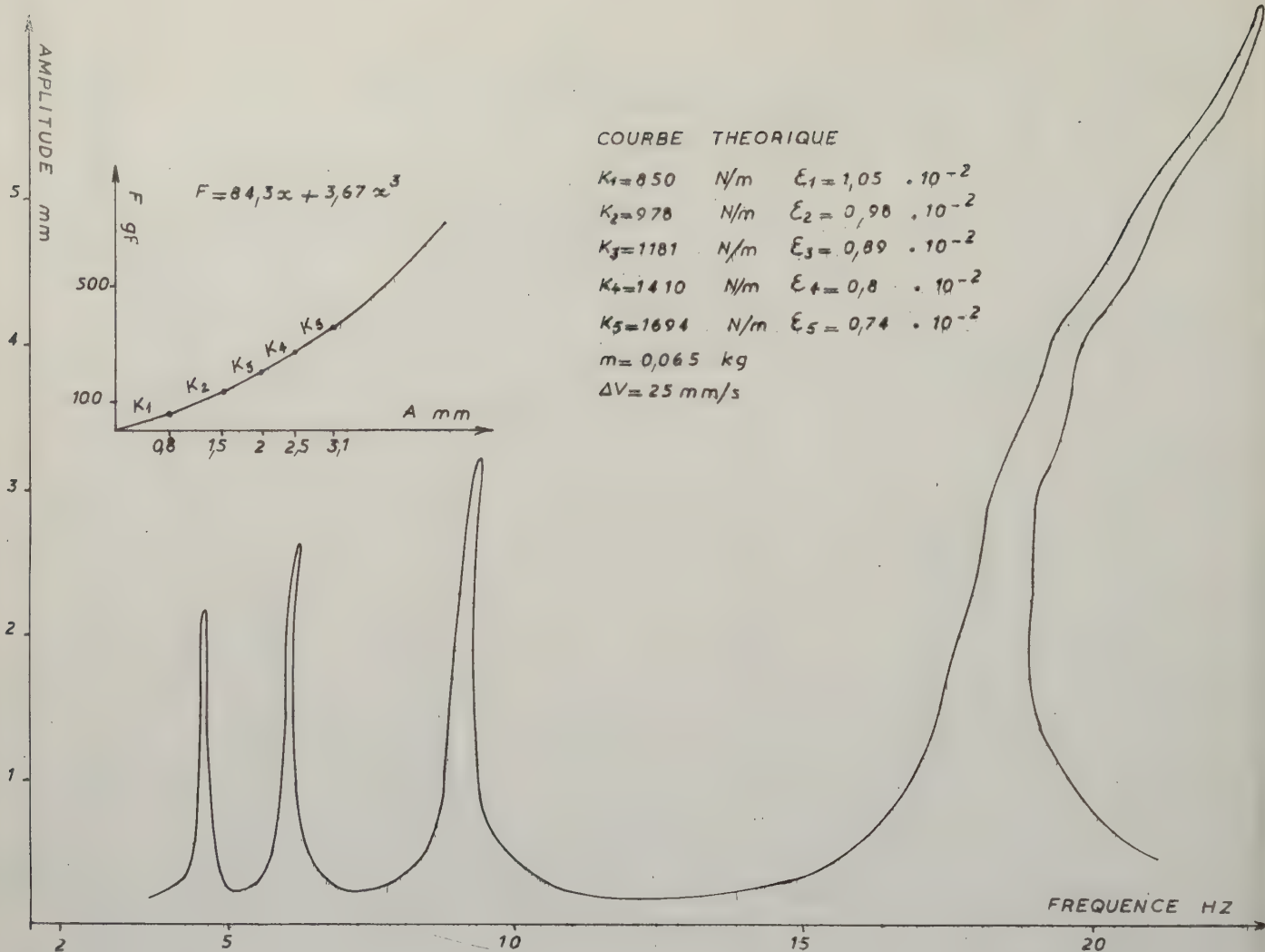


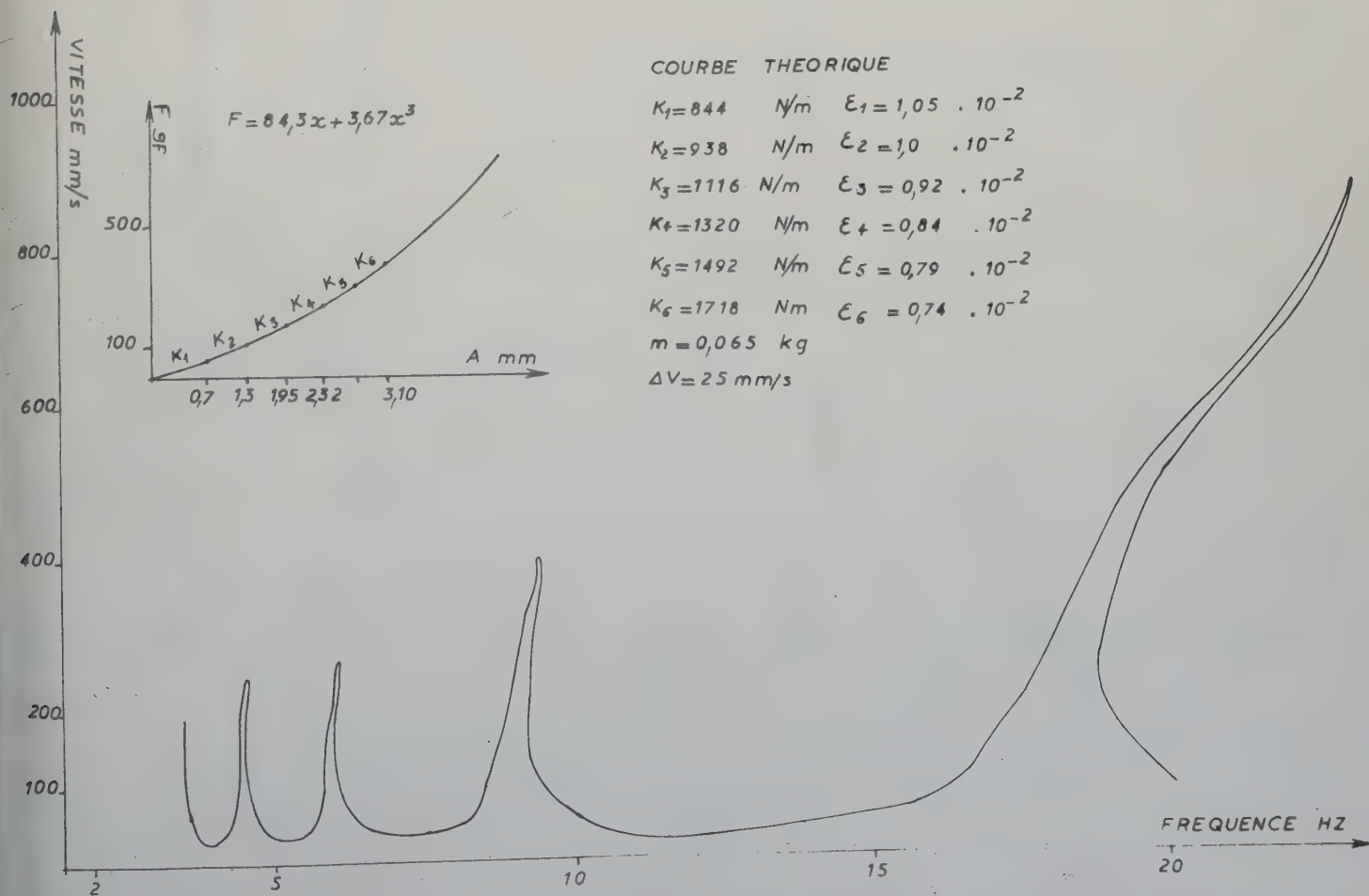
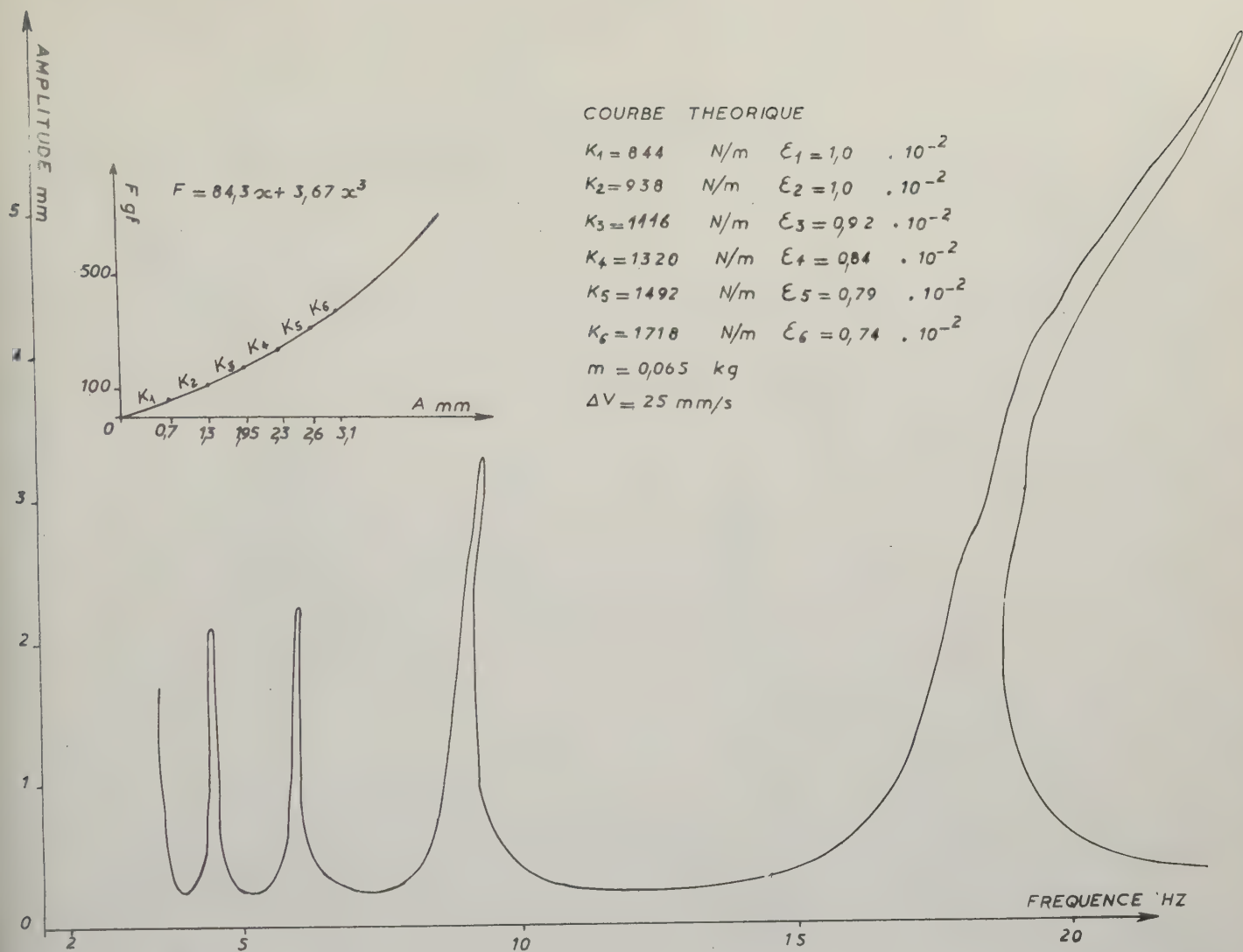
VITESSE mm/s



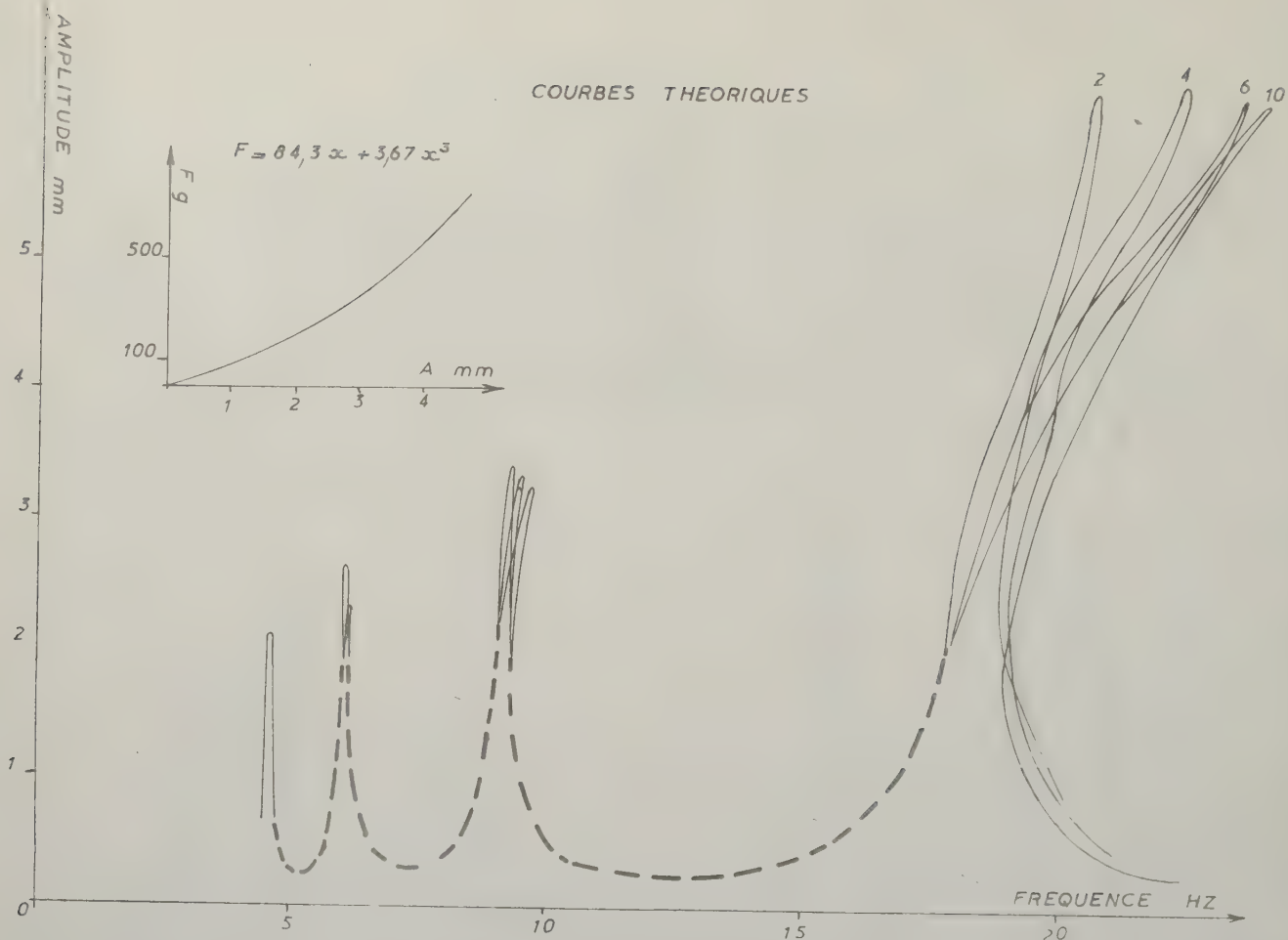




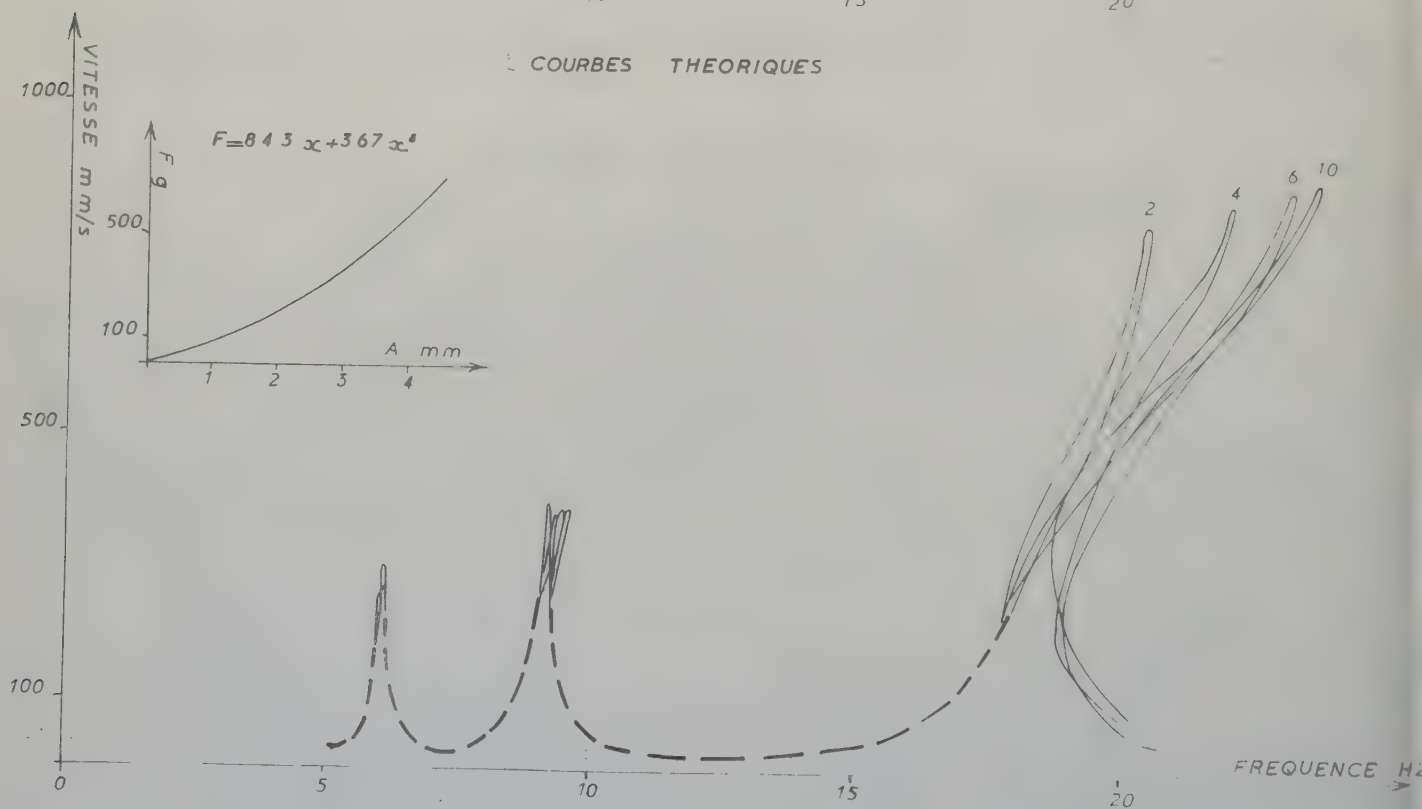




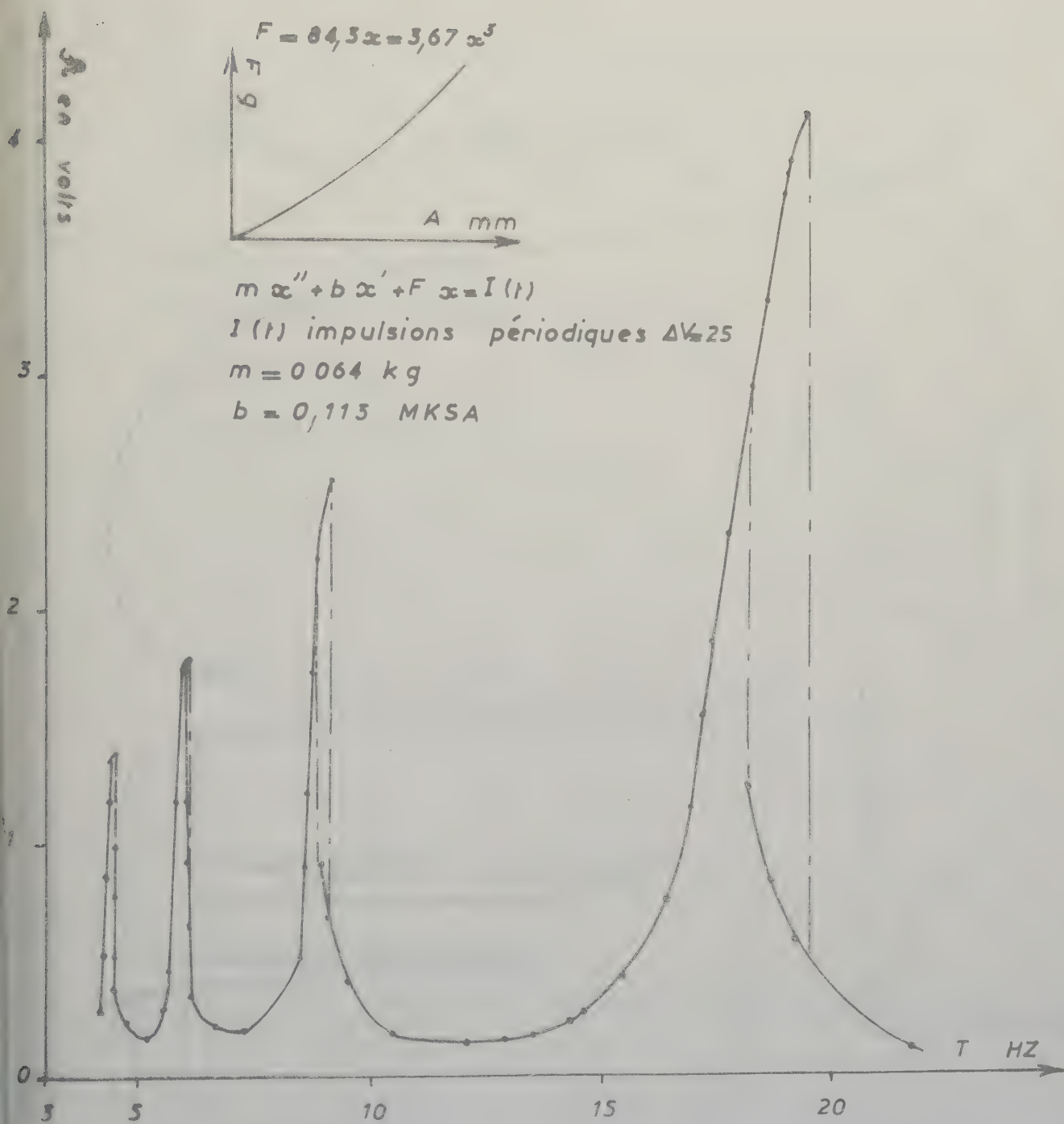
COURBES THEORIQUES



COURBES THEORIQUES



COURBE EXPERIMENTALE



COURBE EXPERIMENTALE

$$F = 0,43 x + 3,67 x^3$$

F en gf

A mm

$$m x'' + b x' + Fx = J(t)$$

J(t) impulsions périodiques

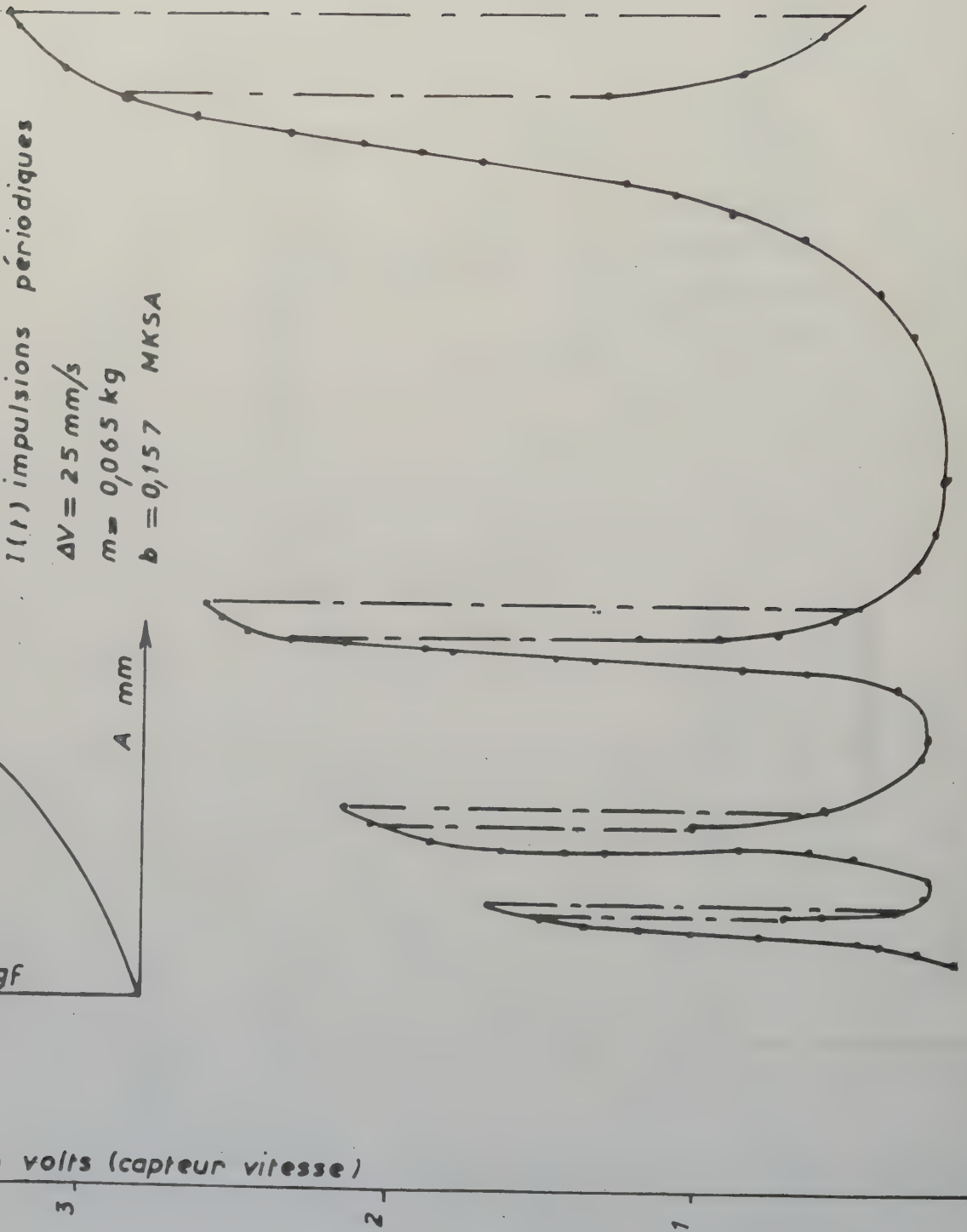
$$\Delta V = 25 \text{ mm/s}$$

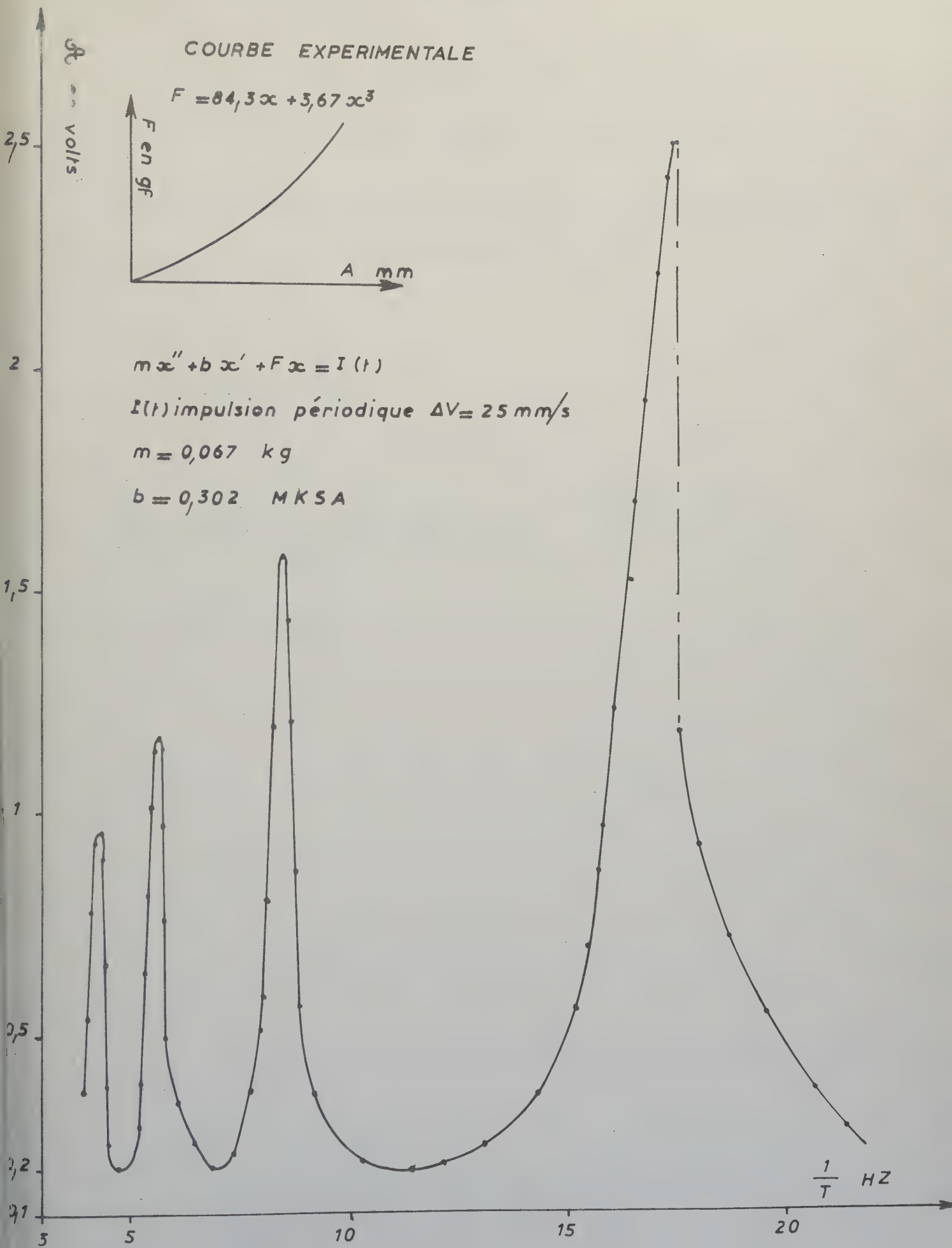
$$m = 0,065 \text{ kg}$$

$$b = 0,157 \text{ MKSA}$$

A en volts (capteur vitesse)

$\frac{1}{T}$ en HZ





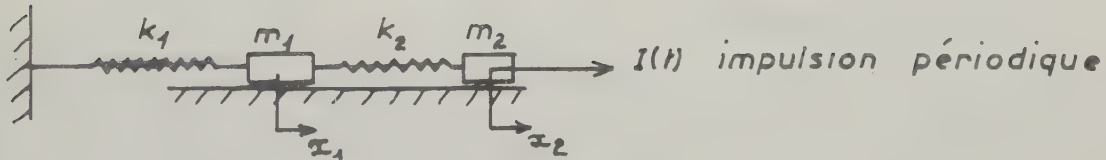
TROISIEME PARTIE

Chapitre I

Etude d'un système linéaire à deux degrés de liberté et conservatif, excité par chocs ou impulsions périodiques

1°) Généralités -

a) Schéma du système étudié -



b) Equations du mouvement -

L'équation qui régit le mouvement est l'équation matricielle :

$$M X'' + K X = F$$

$$\text{avec } M = \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \quad K = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} 0 \\ I(t) \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Pour simplifier le calcul, nous allons prendre :

$$k_1 = k_2 = k$$

$$m_1 = 2m$$

$$m_2 = m$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100$$

Nous allons passer dans la base propre du système, dans cette base, nous aurons des paramètres découplés.

c) Recherche des valeurs propres -

Les valeurs propres λ sont solutions de $\det |K - \lambda M| = 0$

$$\text{soit } \det = m_1 m_2 \lambda^2 - [(k_1 + k_2) m_2 + k_2 m_1] \lambda + k_1 k_2 = 0$$

on tire les valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{k}{m} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{k}{m} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

d) Vecteurs propres et matrice des modes -

Les vecteurs propres doivent vérifier :

$$\begin{aligned} |K - \lambda_1 M| \cdot |Z_1| &= 0 \\ |K - \lambda_2 M| \cdot |Z_2| &= 0 \end{aligned} \quad \text{avec } Z_1 = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{on tire } Z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et } Z_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

d'où la matrice des modes :

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2°) Equations du mouvement dans la base propre -

$$\text{posons } X = Z q \quad \text{avec } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$M X'' + K X = F \quad \text{devient}$$

$$\tilde{Z} = \text{matrice transposée de } Z$$

$$\tilde{Z} M Z q'' + \tilde{Z} K Z q = \tilde{Z} F$$

Si nous effectuons les multiplications matricielles

$$\text{nous avons } \tilde{Z} M Z = \mu = \begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 4m \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Z} K Z = \gamma = \begin{bmatrix} 2(2 - \sqrt{2})k & 0 \\ 0 & 2(2 + \sqrt{2})k \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Z} F = \phi = \begin{bmatrix} \sqrt{2} I(t) \\ \sqrt{2} I(t) \end{bmatrix} \quad \text{si on pose } I(t) = \sqrt{2} I_1(t) \quad \text{on a } \phi = \begin{bmatrix} 2 I_1(t) \\ 2 I_1(t) \end{bmatrix}$$

L'équation matricielle devient :

$$2m q''_1 + (2 - \sqrt{2})k q_1 = I_1(t) \quad (1)$$

$$2m q''_2 + (2 + \sqrt{2})k q_2 = I_1(t) \quad (2)$$

on obtiens des équations découplées, et nous sommes ramenés à étudier deux équations dont l'étude générale a été faite dans la première partie.

3°) Etude des solutions dans la base propre -

Nous savons qu'une impulsion ou un choc entraîne une discontinuité sur la vitesse, entre deux impulsions, les oscillations en q_1 ou q_2 sont des oscillations libres.

La solution de (1) est $q_1 = R_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$ avec $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$

dé même, la solution de (2) est $q_2 = R_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$ avec $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$

En faisant un changement d'origine du temps, on peut avoir :

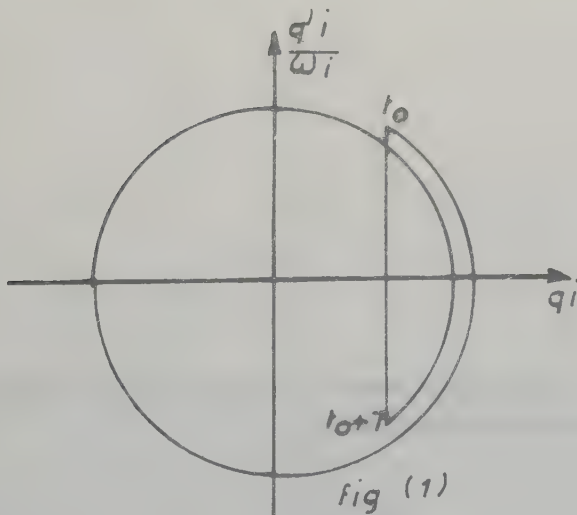
$$q_1 = R_1 \cos \omega_1 t$$

$$q_2 = R_2 \cos(\omega_2 t - \varphi)$$

avec

$$R_i = \frac{\Delta v}{2 \omega_i S_i \sin \frac{1 - r_i}{r_i} \cdot \pi} \quad i = 1, 2$$

$$\left| \begin{array}{l} r_i = \frac{\omega}{\omega_i} \quad i = 1, 2 \\ S_i = +1 \text{ si } T > T_i \\ S_i = -1 \text{ si } \frac{T_i}{2} < T < T_i \end{array} \right.$$



Dans le plan des phases $(q_i, \frac{q'_i}{\omega_i})$, on a

la configuration (voir figure 1).

Les impulsions qui agissent sur les équations (1) et (2) sont simultanées.

Dans les plans $(q'_1, \frac{q'_1}{\omega_1})$, et $(q'_2, \frac{q'_2}{\omega_2})$

on aura les conditions aux limites :

$$q_i(t_0) = q_i(t_0 + T)$$

$$q'_i(t_0) - q'_i(t_0 + T) = \Delta v$$

Cette première relation donne pour le paramètre q_1 :

$$\cos \omega_1 t_0 = \cos \omega_1 (t_0 + T) \text{ soit}$$

$$\omega_1 t_0 = \pm \omega_1 (t_0 + T) + 2 K_1 \pi$$

le signe + est restrictif, il entraîne : $T = -K_1 T_1$

le signe - donne $2 \omega_1 t_0 = -\omega_1 T + 2 K_1 \pi$

soit $t_0 = \frac{\pi}{\omega_1} - \frac{T}{2}$ en prenant $K_1 = 1$

La première relation donne pour le paramètre q_2 :

$$\cos(\omega_2 t_0 - \varphi) = \cos[\omega_2(t_0 + T) - \varphi]$$

$$\text{soit } \omega_2 t_0 - \varphi = \pm [\omega_2(t_0 + T) - \varphi]$$

le signe + est restrictif, il entraîne : $T = -K_2 T_2$

$$\text{le signe - donne } 2 \omega_2 t_0 = -\omega_2 T + 2 K_2 \pi + 2 \varphi \quad (3)$$

soit en portant t_0 dans (3) et en prenant $K_2 = 0$

$$\varphi = \pi \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)$$

La détermination de t_0 et φ nous a permis de synchroniser les temps des solutions q_1 et q_2

4°) Etude des solutions réelles x_1 et x_2 -

On a vu que $X = Z q$, connaissant la solution q_1 et q_2 , on a

$$x_1 = q_1 - q_2$$

$$x_2 = \sqrt{2}(q_1 + q_2)$$

Pour tracer les courbes de réponse du système, il nous faut chercher le maximum de x_1 et x_2 sur la période de l'impulsion.

5°) Organigramme (voir page 81)

6°) Courbes de réponse du système -

voir pages 82,83 .

7°) Conclusion -

Comme pour le système à un degré de liberté linéaire et conservatif, on retrouve ici des résonances supplémentaires à des fréquences sous multiples des fréquences fondamentales f_1 et f_2 .

ORGANIGRAMME

Lire les données

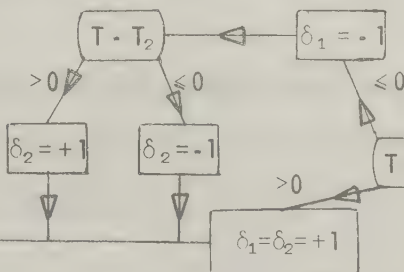
$T_{\text{début}}, T_{\text{fin}}, \text{pas de } T, \Delta v$

ω_1, ω_2

initialisation $\delta_1 = -1, \delta_2 = -1$

$$\varphi = \pi \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)$$

$$T = T_{\text{début}}$$



$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$N = \text{entier de } (50 \times T/T_2)$$

$$\text{pas de } t = T/N$$

$$t_0 = \pi/\omega_1 \cdot T/2$$

$$x_1 \text{ max} = 0$$

$$x_2 \text{ max} = 0$$

$$t = t_0$$

$$r_i = \frac{\omega}{\omega_i} \quad i = 1, 2$$

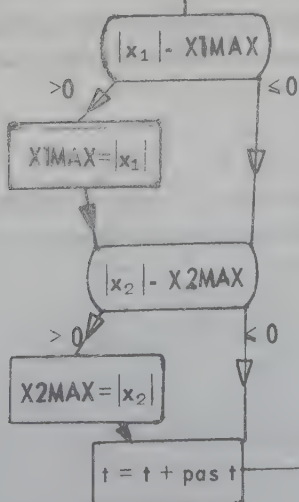
$$R_i = \frac{\Delta v}{2 \omega_i \delta_i \sin \frac{1 - r_i}{r_i} \pi}$$

$$q_1 = R_1 \cos \omega_1 t$$

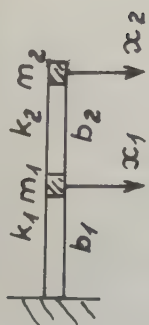
$$q_2 = R_2 \cos(\omega_2 t - \varphi)$$

$$x_1 = q_1 - q_2$$

$$x_2 = \sqrt{2}(q_1 + q_2)$$



COURBE THEORIQUE



$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$k_1 = k_2 = k$$

$$m_1 = 2m$$

$$m_2 = m$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 100 \text{ rad/s}$$

$$\frac{x_2}{\Delta V \sqrt{2}}$$

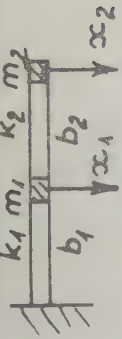
3

2

1

$\omega \text{ rad/s}$

COURBE THEORIQUE



$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \\ k_1 &= k_2 = k \\ m_1 &= 2m \\ m_2 &= m \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 100 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\sqrt{2} x_1}{\Delta v}$$

3

2

1

0.5

0

$\omega \text{ rad/s}$

150

100

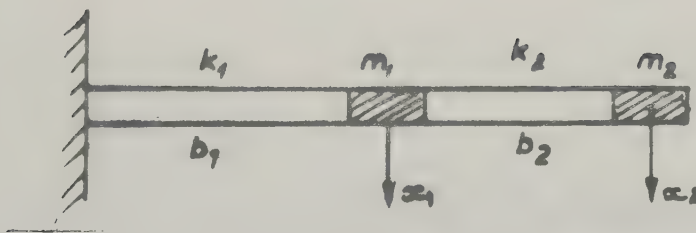
50

Chapitre II

Etude d'un système linéaire non conservatif à deux degrés de liberté excité par chocs ou impulsions périodiques

1°) Généralités -

a) Schéma du système étudié -



Le système est constitué de deux lames et deux masses m_1 et m_2 .

On sait que ce système continu peut être considéré comme un système à deux degrés de liberté ; l'approximation étant valable pour les deux premières fréquences propres.

b) Equations du mouvement -

Le mouvement est régi par l'équation matricielle

$$M \ddot{X} + B \dot{X} + K X = I$$

$$\text{avec } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 \\ I(t) \end{bmatrix}$$

c) Remarque -

Dans tout ce que l'on a vu précédemment, il était possible d'étudier la solution dans le plan des phases. Pour le système linéaire non conservatif à deux degrés de liberté, il est impossible de diagonaliser simultanément les trois matrices M , B et K , ce qui nous empêche de travailler dans le plan des phases.

2°) Etude de la solution -

Nous allons étudier la solution, en cherchant la réponse du système à chaque terme de la décomposition en série de Fourier de l'impulsion $I(t)$.

Si on appelle A l'aire de l'impulsion, soit $A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I(t) \Delta t$

on a la décomposition : $I(t) = \frac{A}{T} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \omega t \right]$

a) Réponse au terme constant : $\frac{A}{T} = \frac{A \omega}{2 \pi}$

Les équations donnant cette réponse sont :

$$m_1 x_1'' + (b_1 + b_2) x_1' - b_2 x_2' + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 x_2'' - b_2 x_1' + b_2 x_2' - k_2 x_1 + k_2 x_2 = \frac{A \omega}{2 \pi}$$

on tire

$$\begin{cases} x_1 = \frac{A \omega}{2 \pi} \frac{1}{k_1} \\ x_2 = \frac{A \omega}{2 \pi} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \end{cases}$$

b) Réponse au terme général : $\frac{A \omega}{\pi} \cos n \omega t$

Cherchons une solution au terme général complexe $\frac{A \omega}{\pi} e^{j n \omega t}$

posons

$$\begin{cases} (X) = X e^{j n \omega t} \\ (X)' = + j n \omega X e^{j n \omega t} \\ (X)'' = - n^2 \omega^2 X e^{j n \omega t} \end{cases}$$

L'équation matricielle devient :

$$(X) \cdot (R) = (F) \quad \text{avec} \quad (R) = K + j n \omega B - n^2 \omega^2 M$$

$$(F) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A \omega}{\pi} e^{j n \omega t} \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad (X) = (R^{-1}) (F)$$

$$R = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + (b_1 + b_2) j \omega n - \omega^2 n^2 m_1 & -k_2 - b_2 j \omega n \\ -k_2 - b_2 j \omega n & k_2 + b_2 j \omega n - \omega^2 n^2 m_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad (R^{-1}) = \frac{1}{\Delta(n)} \begin{bmatrix} k_2 + b_2 j \omega n - \omega^2 n^2 m_2 & k_2 + j b_2 \omega n \\ k_2 + j b_2 \omega n & k_1 + k_2 + (b_1 + b_2) j \omega n - \omega^2 n^2 m_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \Delta(n) = Y + j Z$$

$$Y = \omega^4 n^4 m_1 m_2 - \omega^2 n^2 [k_2 (m_1 + m_2) + k_1 m_2 + b_2 b_1] + k_1 k_2$$

$$Z = \omega^3 n^3 [-b_2 (m_1 + m_2) - b_1 m_2] + (b_2 k_1 + b_1 k_2) \omega n$$

$$\text{On a } (X) = (R^{-1}) (F)$$

(X) étant une solution complexe

La solution réelle $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ est donnée en prenant la partie réelle de (X)

$$\text{d'où } \begin{cases} x_1(n) = \frac{1}{|\Delta(n)|^2} \frac{A \omega}{\pi} [B_1(n) \cos \omega n t + q_1(n) \sin \omega n t] \\ x_2(n) = \frac{1}{|\Delta(n)|^2} \frac{A \omega}{\pi} [B_2(n) \cos \omega n t + C_2(n) \sin \omega n t] \end{cases}$$

$$\text{avec } |\Delta(n)|^2 = Y^2 + Z^2$$

$$B_1(n) = k_2 Y + b_2 \omega n Z$$

$$C_1(n) = -b_2 \omega n Y + k_2 Z$$

$$B_2(n) = (k_1 + k_2 - \omega^2 n^2 m_1) Y + \omega n (b_1 + b_2) Z$$

$$C_2(n) = (k_1 + k_2 - \omega^2 n^2 m_1) Z - \omega n (b_1 + b_2) Y$$

c) Solution complète -

$$x_1 = \frac{A \omega}{2 \pi} \frac{1}{k_1} + \frac{A \omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\Delta(n)|^2} [B_1(n) \cos n \omega t + C_1(n) \sin n \omega t]$$

$$x_2 = \frac{A \omega}{2 \pi} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) + \frac{A \omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\Delta(n)|^2} [B_2(n) \cos n \omega t + C_2(n) \sin n \omega t]$$

3°) Organigramme (voir page suivante) (88)

4°) Courbes de réponse du système -

a) Courbes théoriques -

(voir pages 89)

b) Courbes expérimentales -

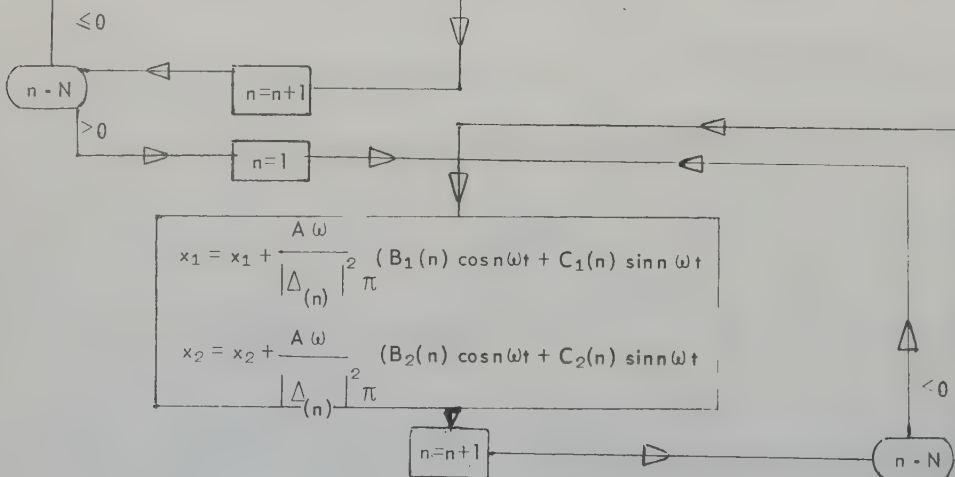
(voir pages 90 à 94)

ORGANIGRAMME

Lire $k_1, k_2, b_1, b_2, m_1, m_2, A$
 Tdébut, Tfin, pas T
 N = Nombre de termes du développement
 T = T début (initialisation)

$f = \frac{1}{T}$
 pas de $t = T/100$
 $\omega = \frac{2\pi}{T}$
 $t = 0$
 $x_1 = \frac{A(\omega)}{\pi} \frac{1}{k_1}$
 $x_2 = \frac{A(\omega)}{\pi} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$
 $X1MAX = x_1$
 $X2MAX = x_2$
 $n = 1$

$Y = \omega^4 n^4 m_1 m_2 - \omega^2 n^2 [k_2(m_1 + m_2) + k_2 m_2 + b_2 b_1] + k_1 k_2$
 $Z = \omega^3 n^3 [-b_2(m_1 + m_2) - b_1 m_2] + [b_2 k_1 + b_1 k_2] \omega n$
 $B_1(n) = k_2 Y + b_2 \omega n Z$
 $C_1(n) = -b_2 \omega n Y + k_2 Z$
 $B_2(n) = (k_1 + k_2 - \omega^2 n^2 m_1) Y + \omega n (b_1 + b_2) Z$
 $C_2(n) = (k_1 + k_2 - \omega^2 n^2 m_1) Z - \omega n (b_1 + b_2) Y$
 $|\Delta_{(n)}|^2 = Y^2 + Z^2$

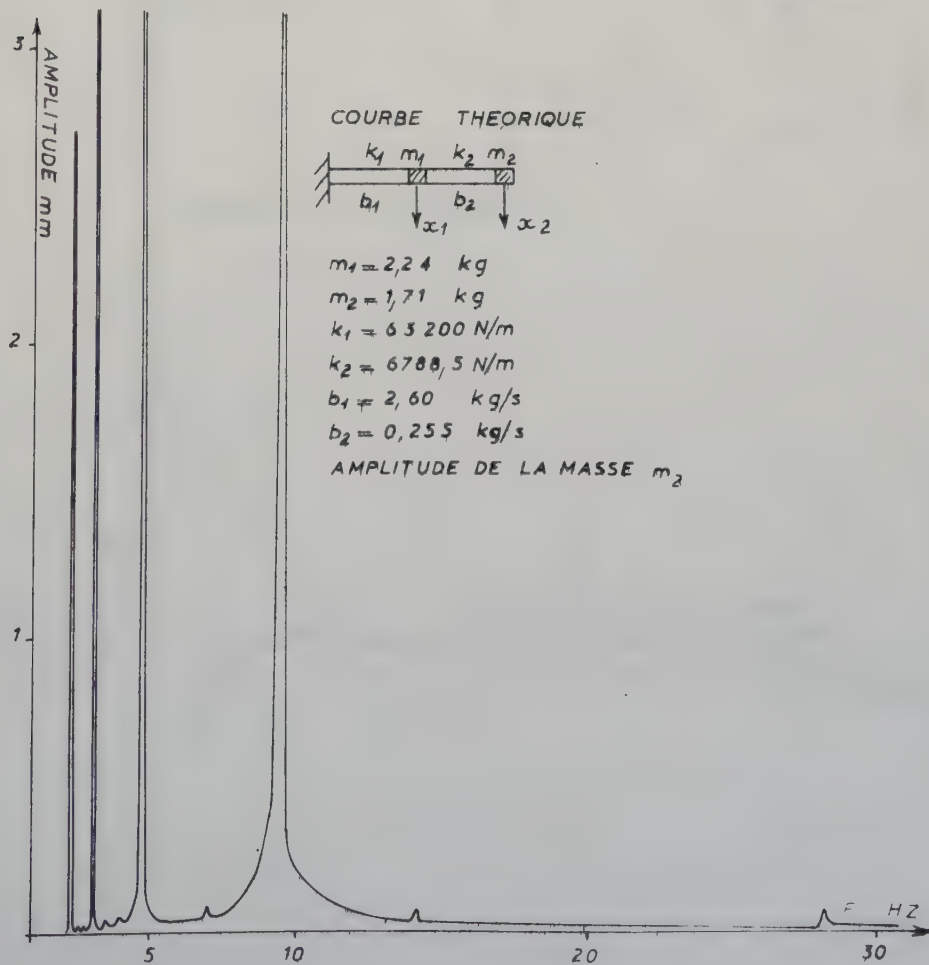
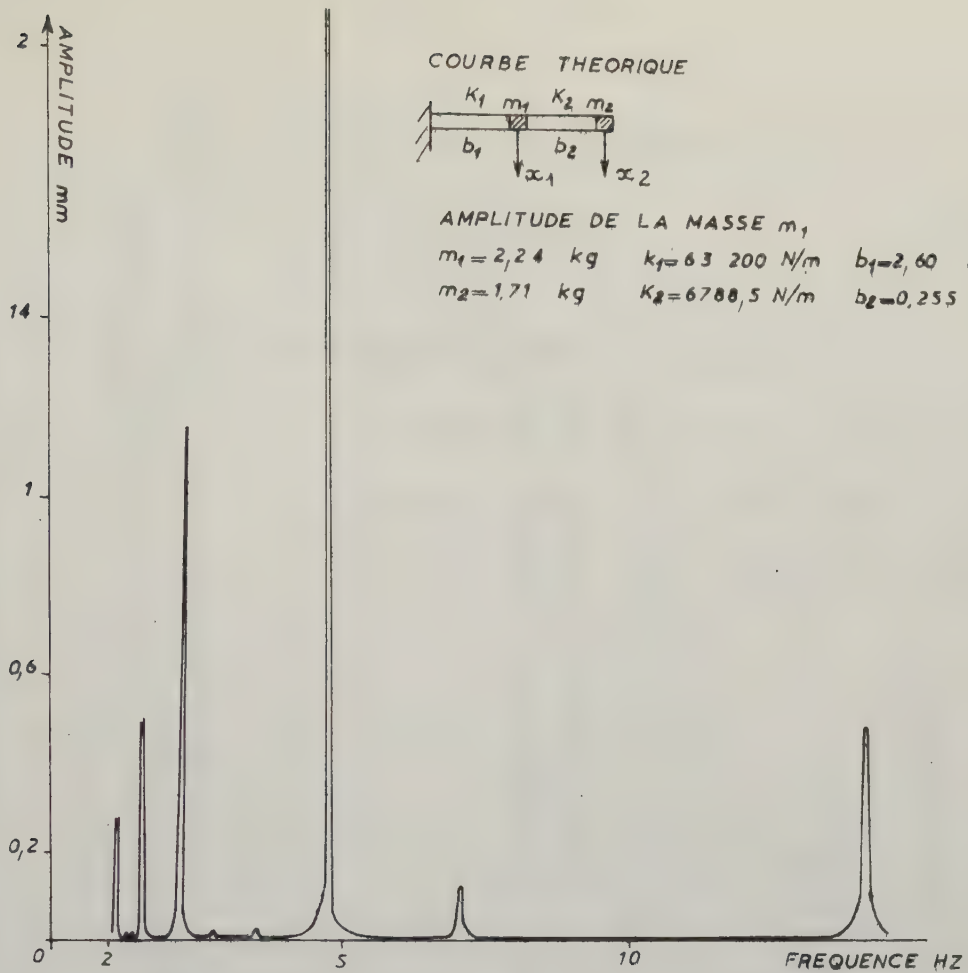


$|x_1| - X1MAX$
 $X1MAX = |x_1|$

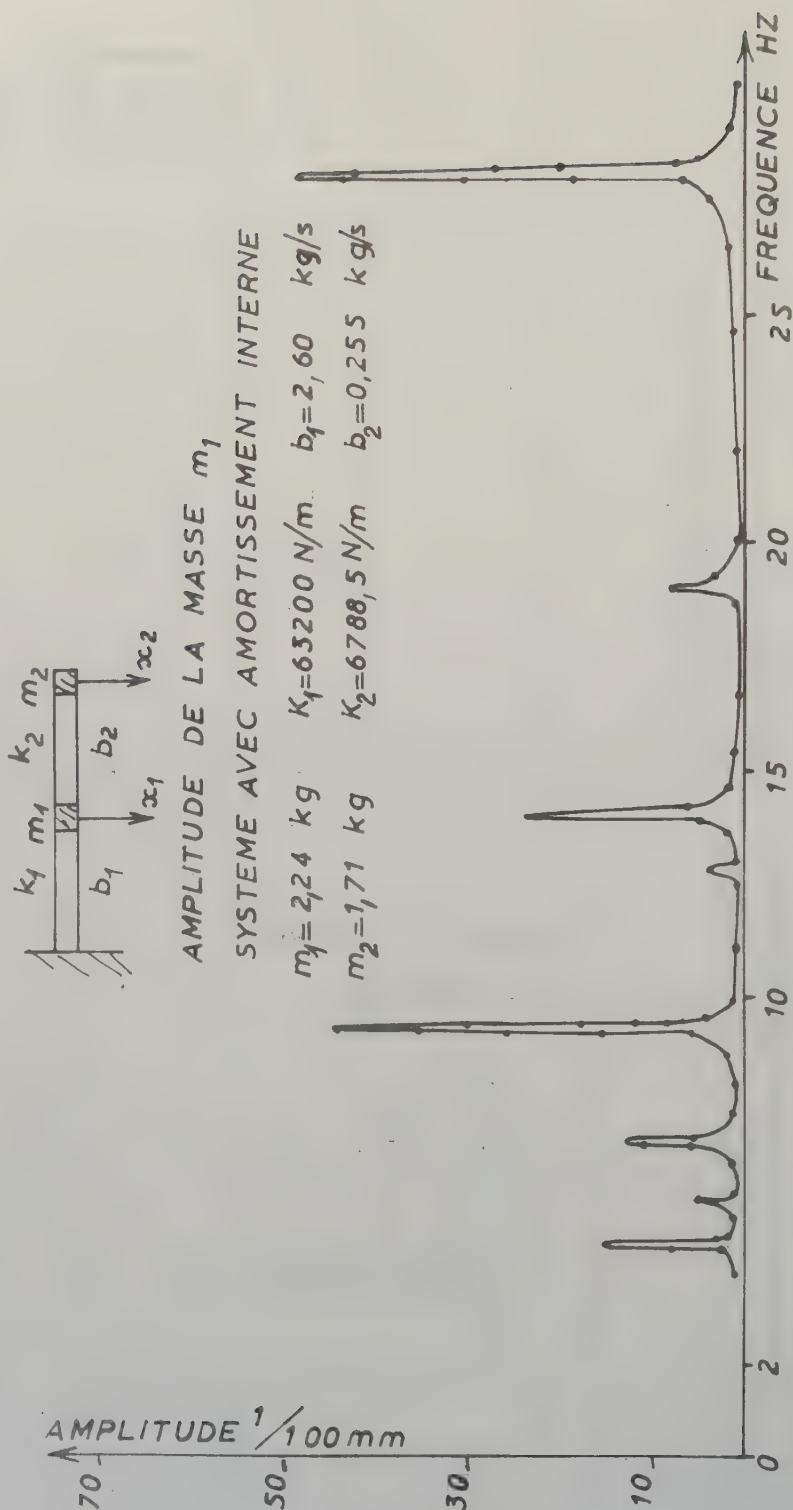
$|x_2| - X2MAX$
 $X2MAX = |x_2|$

$t = t + \text{pasT}$

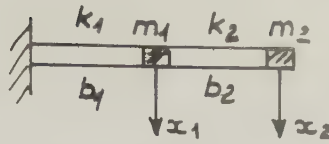
Résultats
 X1MAX
 X2MAX
 f.



COURBE EXPERIMENTALE



COURBE EXPERIMENTALE

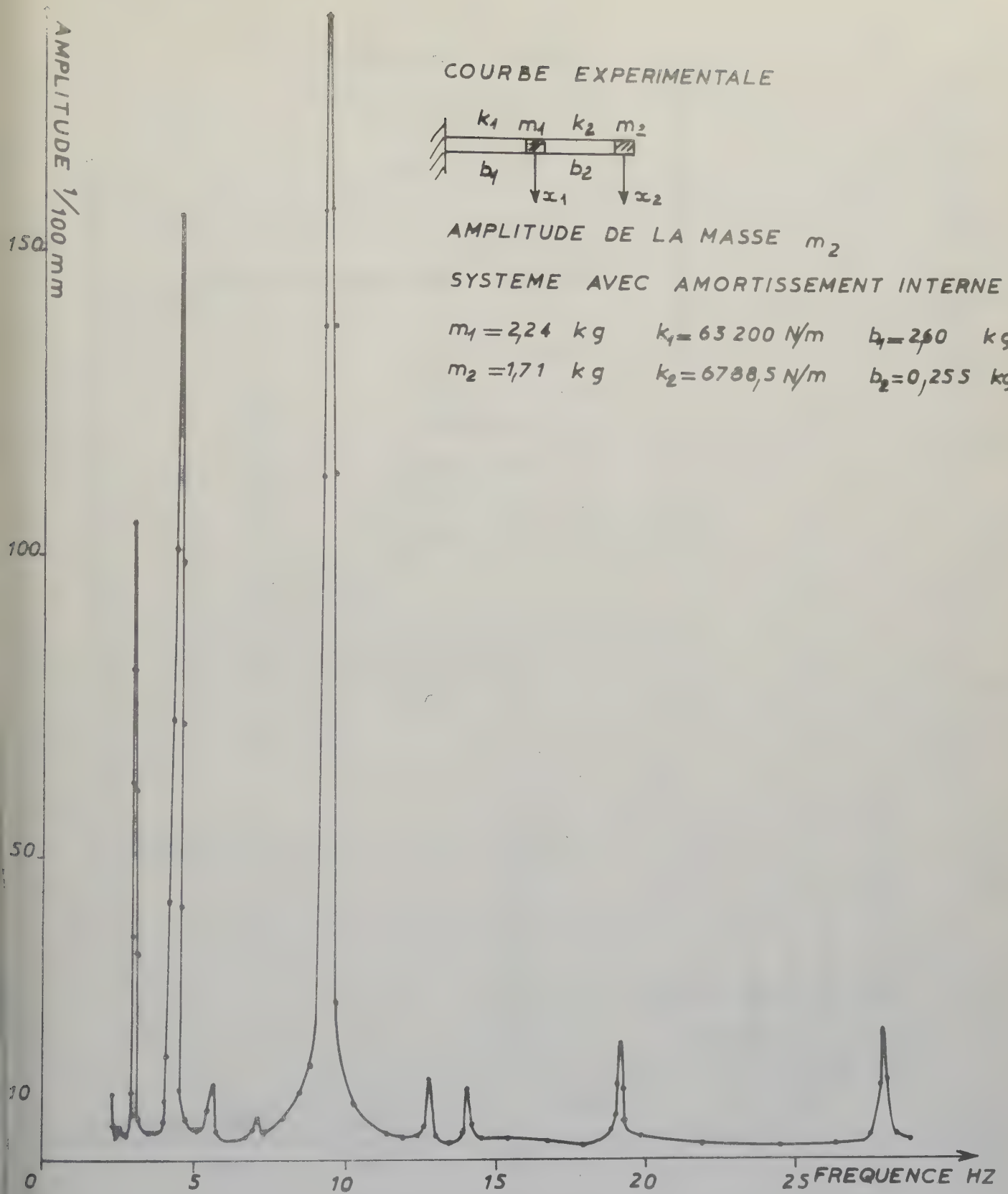


AMPLITUDE DE LA MASSE m_2

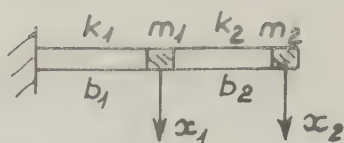
SYSTEME AVEC AMORTISSEMENT INTERNE

$$m_1 = 2,24 \text{ kg} \quad k_1 = 63\,200 \text{ N/m} \quad b_1 = 2,60 \text{ kg/s}$$

$$m_2 = 1,71 \text{ kg} \quad k_2 = 6788,5 \text{ N/m} \quad b_2 = 0,255 \text{ kg/s}$$

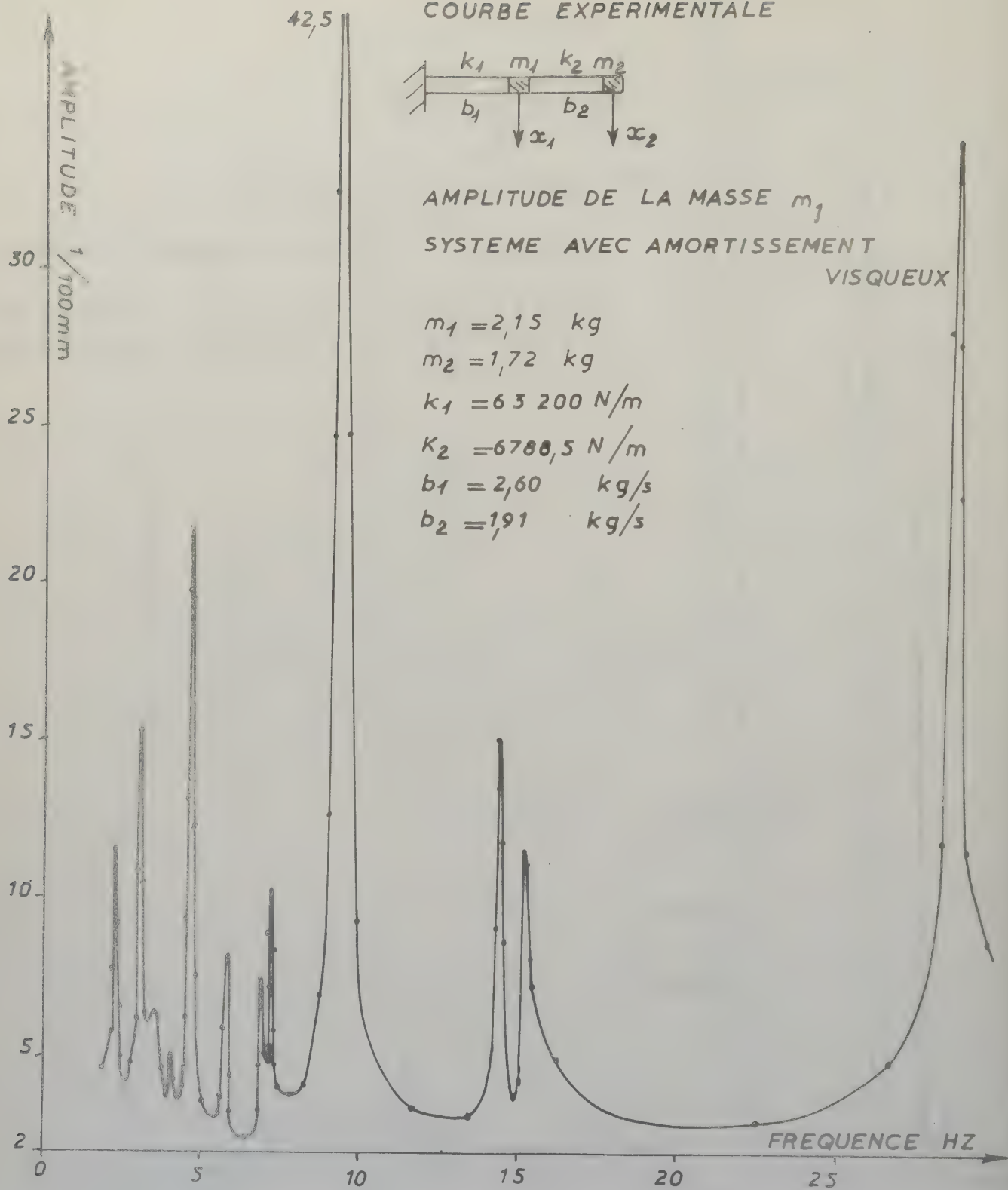


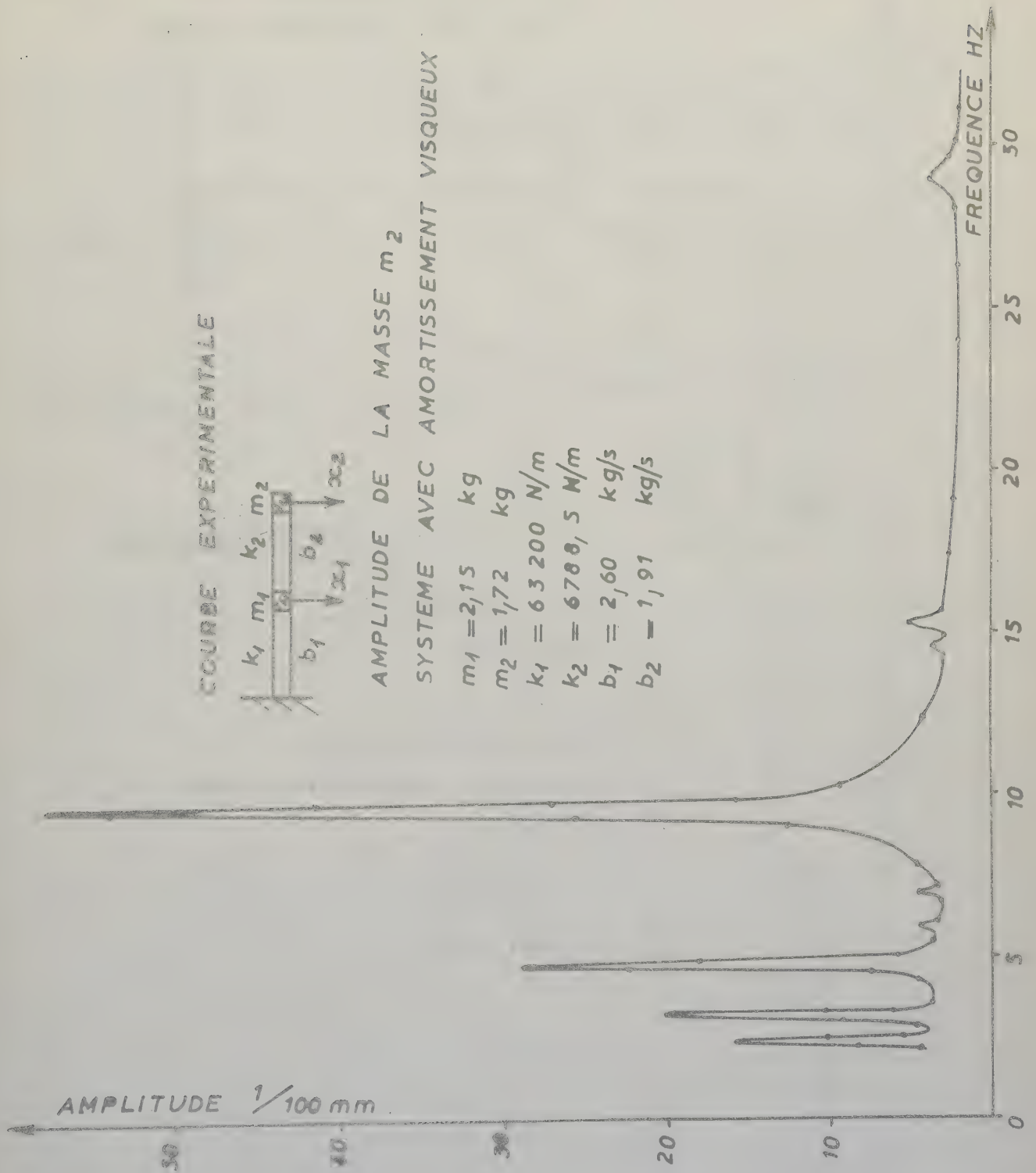
COURBE EXPERIMENTALE

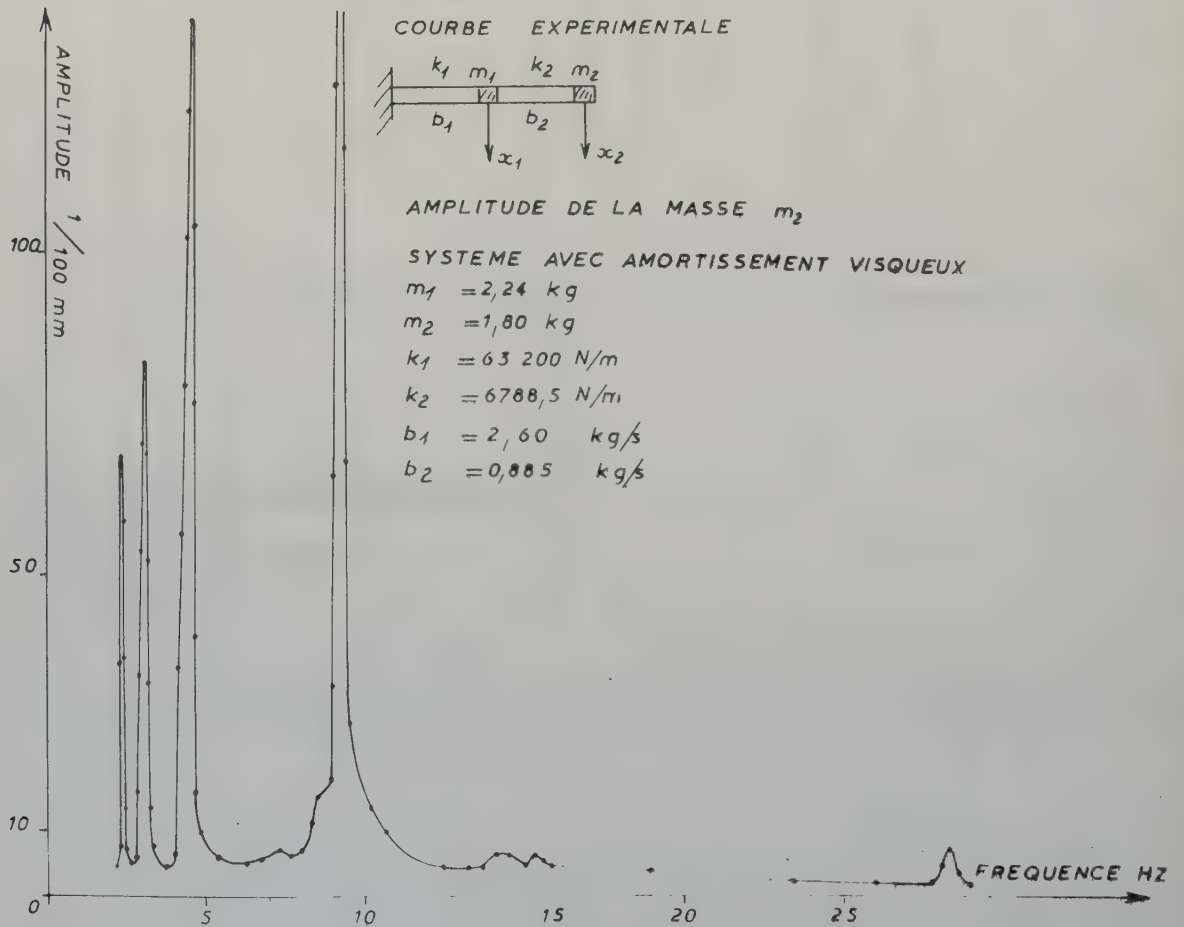
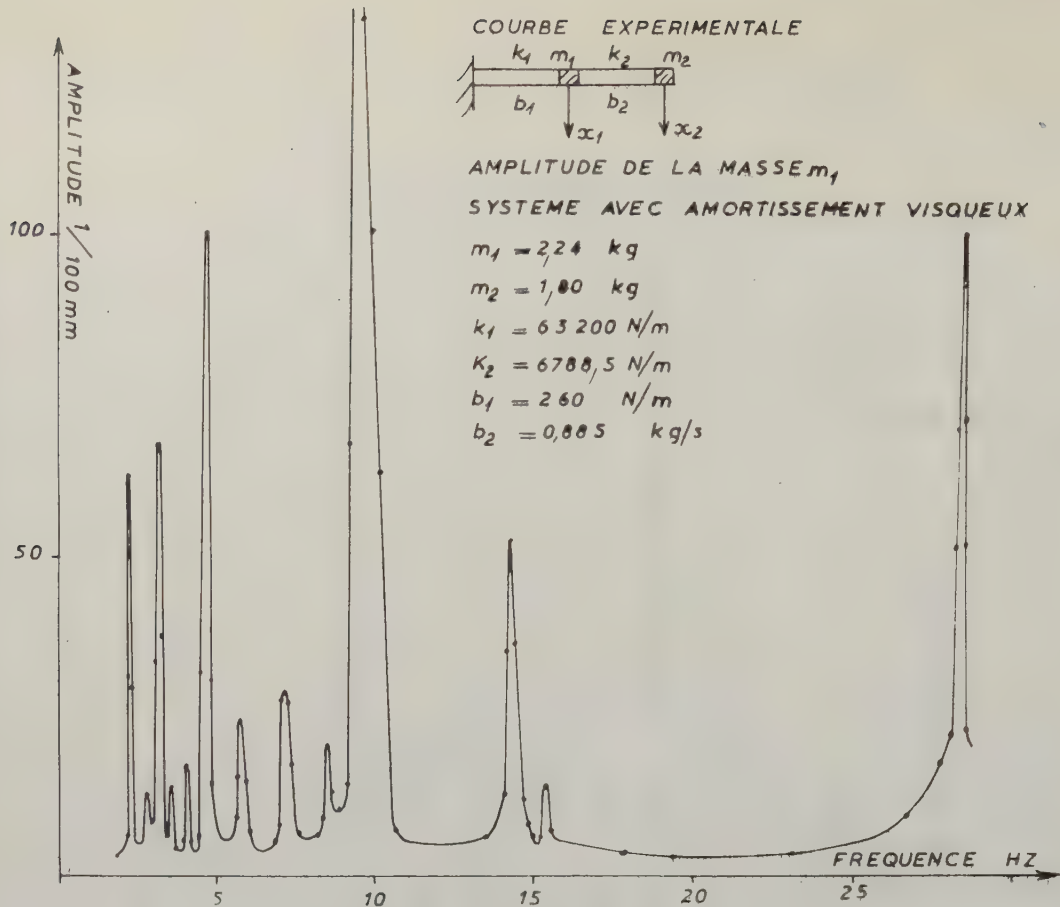


AMPLITUDE DE LA MASSE m_1
SYSTEME AVEC AMORTISSEMENT
VISQUEUX

$m_1 = 2,15 \text{ kg}$
 $m_2 = 1,72 \text{ kg}$
 $k_1 = 63\,200 \text{ N/m}$
 $k_2 = 6788,5 \text{ N/m}$
 $b_1 = 2,60 \text{ kg/s}$
 $b_2 = 1,91 \text{ kg/s}$







5°) Conclusion -

Si l'on compare les courbes théoriques et les courbes expérimentales, on remarque qu'elles ont la même allure (apparition de maxima aux sous harmoniques des fréquences fondamentales) .

Le rapport entre les maxima de la courbe expérimentale aux maxima correspondants de la courbe théorique n'est pas le même, ceci vient du fait que l'amortissement mesuré b_1 et b_2 est très variable en fonction de l'amplitude, les amortissements que l'on a pris pour le calcul sont certainement très approchés.

On peut remarquer que certains maxima se trouvant sur la courbe expérimentale, ne se retrouvent pas sur la courbe théorique. Ceci s'explique par l'excitation par chocs ou impulsions qui fait apparaître les sous harmoniques d'une fréquence plus élevée du système continu ; système que l'on a approché par un système à deux degrés de liberté.

On a vu que lorsque deux sous-harmoniques venant de fréquences fondamentales différentes sont très proches, le système non amorti avait deux résonances infinies ; par contre, pour le système amorti, l'amortissement confond ces deux résonances en une seule.

BIBLIOGRAPHIE



- 1°) Les cours de mécanique générale, de mécanique des vibrations et de mécanique non linéaire de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes
Y. PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon

- 2°) Stability and oscillations of elastic systems

Paradoxes, Fallacies, and new concepts

Y.G.PANOVKA

I. GUBANOVA

a/b Consultants Bureau New-York 1965 pages 144 à 154

- 3°) Introduction to Non Linear Mechanics

N. KRYLOV et N. BOGOLIOUBOV

